Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Институт новых материалов и технологий

А. М. Михайленко
Е. И. Устинова

ОБРАБОТКА ОДНОМЕРНЫХ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. М. Михайленко, Е. И. Устинова

Обработка одномерных опытных данных

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по направлению подготовки
22.03.02, 22.04.02 — Металлургия

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2020

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.172я73
М69

Рецензенты:

д-р техн. наук *С. В. Смирнов* (директор Института машиноведения УрО РАН);

канд. техн. наук *Г. П. Перунов* (завотделом обработки металлов давлением ОАО «Уральский институт металлов»)

Научный редактор доц., канд. техн. наук *С. И. Паршаков*

Михайленко, А. М.

М69 Обработка одномерных опытных данных : учебное пособие / А. М. Михайленко, Е. И. Устинова ; М-во науки и высш. образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 288 с.

ISBN 978-5-7996-3167-3

Изложены теоретические основы и практические методы обработки одномерных опытных данных, наиболее часто наблюдаемых в металлургической практике, и в частности в обработке металлов давлением. В рамках системного подхода сформулирована обобщенная модель экспериментального исследования, обосновывающая и позволяющая сформулировать единые вероятностные подходы к описанию и обработке опытных данных разного вида. Учебное пособие может быть использовано как дополнение к лекционному материалу для студентов, обучающихся по направлению «Металлургия».

Библиогр.: 28 назв. Табл. 22. Рис. 64. Прил. 12.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.172я73

ISBN 978-5-7996-3167-3

Предисловие

При изучении любой дисциплины очень важно использовать четкие, однозначные и конкретные определения для рассматриваемых понятий и величин. Конкретный и однозначный подход к формулированию используемых величин и понятий для методов и методик обработки опытных данных важен еще и потому, что значительная часть экспериментальных измерений и исследований, которые проводятся на действующем производстве, используются для характеристики качества производимой продукции, ее соответствия стандартам и сертификатам качества. В рамках систем сертификации качества продукции и производства большинство производимых испытаний в той или иной степени стандартизованы.

Часто стандартизованы и методики обработки опытных данных, а также используемые при этом понятия и величины. Поэтому в настоящей работе в качестве основных определений, используемых при обработке данных, применяют определения, приведенные в соответствующих национальных стандартах (ГОСТ и ГОСТ-Р) [1–6] и рекомендациях по стандартизации (Р), принятых национальным органом по стандартизации — Госстандартом [7–9]. Такой подход к изучению новых понятий представляется наиболее правильным в рамках подготовки специалистов по ОМД, т. к. позволяет уделять большое внимание вопросам стандартизации. В то же время для ряда понятий, определенных в действующих сейчас ГОСТах и рекомендациях известны или могут быть сформулированы более точные определения, лучше, по мнению автора, отражающие существо определяемого объекта. Приведенные альтернативные определения следует рассматривать как «параллельные», не отменяющие основных определений из ГОСТов и рекомендаций, а лишь уточняющие, расширяющие «стандартные» определения.

Аналогичный подход (использование в системах стандартизации и сертификации продукции и производства) применен и при отборе опытных данных для изучения основных величин, понятий, критериев и методик их расчета из всего весьма обширного моря информации, пронизывающего мировую литературу, посвященную изучаемым вопросам. Дополнительным ограничением широты изучаемого материала явилась практика применения положений теории вероятностей и математической статистики в условиях изучения и анализа как самих процессов ОМД, так и качества продукции, выпускаемой с использованием этих процессов.

Глубина изложения рассматриваемых в учебном пособии вопросов также весьма существенно ограничена его практической направленностью и предназначением. Изложенный материал следует рассматривать как «технические приложения» известных методов теории вероятностей и математической статистики.

Введение

Роль эксперимента в научной и производственной деятельности была, остается и, видимо, всегда будет оставаться весьма значительной. Это связано с двумя важнейшими функциями экспериментальной работы: во-первых, как источника новых знаний, практической, фундаментной основы теоретических обобщений и, во-вторых, как критерия проверки истинности построенных теоретических моделей. Кроме того, современное состояние теоретической базы большинства научных направлений, особенно прикладного характера, таково, что обойтись использованием одних только теоретических построений невозможно, для адекватного отражения реальной действительности приходится использовать некоторые величины, определение значений которых возможно только лишь на основе экспериментальных исследований.

В 2000–2018 гг. в области обработки металлов давлением (ОМД) имеется достаточно мощная теоретическая база, основывающаяся на современных методах механики сплошной среды, но решить абсолютно все вопросы и задачи чисто теоретическими методами пока невозможно. Часть задач научной и производственной деятельности приходится решать основываясь на фактических результатах, получаемых в ходе проведения лабораторных научных исследований или повседневной производственной практики, т. е. основываясь на экспериментальных данных. Например, невозможно произвести расчет энергосиловых параметров любого процесса ОМД без использования такой характеристики обрабатываемого материала, как сопротивление деформации, а определить этот показатель с достаточной точностью возможно лишь опытным путем: в процессе изучения конкретного металла или сплава с помощью специальной экспериментальной установки. То же касается других показателей и характеристик процессов ОМД — трения, упругости, пластичности, прочности и ряда других характеристик деформируемого материала, а также рабочего инструмента и рабочих машин по ОМД (прокатные станы, рабочие клети, валки, молоты, прессы, штампы и т. п.).

С одной стороны, современные технологические процессы и производственные комплексы по ОМД являются сложными, многофакторными и многокритериальными системами, причем значительная часть факторов в таких системах имеют вероятностные характеристики, это так называемые «плохо организованные» системы [10]. Как показывает практика, роль эксперимента в изучении таких систем особенно высока, а часто эксперимент даже более эффективен по показателям качества описания исследуемого объекта и произведенным затратам на получение такого описания, чем самые современные теоретически построенные детерминированные модели. Для характеристики и математического описания «плохо организованных систем» с использованием экспериментальной информации лучше всего воспользоваться так называемыми вероятностными или статистическими подходами, обобщенными, сформулированными в математических дисциплинах «Теория вероятностей» и «Математическая статистика» [10].

С другой стороны, ведение любой современной производственной деятельности, в том числе и в области металлургии, неразрывно связано с разноплановым информационным потоком, имеющим различные механизмы и способы формирования, а также различное назначение и разные методы использования. Причем с каждым годом, по мере развития и совершенствования технологий производства, логистики, управленческих функций и т. п., мощность сопутствующего информационного потока существенно возрастает. Значительную часть производственного информационного потока составляют именно опытные данные, которые получают по всему технологическому циклу, начиная с процесса приемки исходного сырья и заготовки, настройки параметров, анализа свойств полупродукта и готовых изделий в лабораториях и заканчивая процессом отгрузки готовой продукции. Более того, современные модели систем менеджмента качества предусматривают и дополнительные потоки данных об использовании и даже утилизации готовой продукции, давно покинувшей производственные площадки. Для обработки, анализа и получения практически значимых результатов такого информационного потока нужны специальные методы обработки и анализа опытных данных, наилучшей базой, теоретической основой, для которых являются теория вероятностей и математическая статистика.

Исследовательская экспериментальная деятельность в области ОМД сопряжена с большими материальными, энергетическими, трудовыми и прочими затратами. Данные затраты обуславливают высокую стоимость опытных данных, поэтому эффективное проведение эксперимента и использование полученных опытных данных являются важной технически, экономически и организационно обоснованной задачей. В 2000–2018 гг. разработано большое количество методик экспериментального исследования и обработки опытных данных, позволяющих значительно сократить затраты на эксперимент без потери информации об исследуемом объекте. Такие методы и методики базируются на использовании вероятностных и статистических подходов, а также положений, сформулированных в дисциплине «Математическое планирование эксперимента».

1. Опытные данные. Эксперимент. Объект эксперимента

Термин **опытные данные** можно определить следующим образом: это некоторая фактическая информация, которую человек может получить в ходе проведения эксперимента. Синонимами термина *опытные данные* являются термины *экспериментальные данные*, *практические данные*, *эмпирические данные* и т. п. Опытные данные являются результатом проведения эксперимента, порождаются экспериментом и наследуют все те свойства, которые характерны конкретному эксперименту. Поэтому для понимания сути опытных данных имеет смысл первоначально однозначно определить понятие *эксперимент* и рассмотреть его особенности как генератора опытных данных.

В разного рода технической литературе можно найти разнообразные определения понятия эксперимент, которые неплохо обобщаются следующим определением из ГОСТ 24026–80 [2]: **эксперимент** — система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

Очень подробное определение приведено в Большой советской энциклопедии: **эксперимент** (от лат. experimentum — проба, опыт) — метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности. Отличаясь от наблюдения активным оперированием изучаемым объектом, эксперимент осуществляется на основе теории, определяющей постановку задач и интерпретацию его результатов. Нередко главной задачей эксперимента служит проверка гипотез и предсказаний теории, имеющих принципиальное значение (так называемый решающий эксперимент). В связи с этим эксперимент как одна из форм практики выполняет функцию критерия истинности научного познания в целом.

Учитывая чрезвычайную широту понятия *эксперимент* и широту областей его использования, наиболее общие толкования этого понятия следует искать в философских книгах, словарях и справочниках. Обобщая известные определения из разных философских словарей, можно получить такую краткую формулировку.

С общефилософских, гносеологических, позиций **эксперимент** — чувственно-предметная деятельность человека, направленная на получение информации о реально существующем объекте исследования или исследуемом явлении.

Другими словами, эксперимент — это некоторая система действий человека, направленных на изучение реально существующего объекта или явления при помощи своих чувств. Для обострения, усиления своих чувств человек может прибегать к помощи специальных технических устройств, обозначаемых общим термином *средства измерений*. Но это не меняет сути конечного восприятия результатов эксперимента человеком — исследователем.

В наиболее общем смысле все эксперименты можно подразделить на две основные группы:

- физические эксперименты (натурные, выполняемые на реальном изучаемом объекте, и модельные, выполняемые на физической модели реального изучаемого объекта);
- мысленные эксперименты (логические, проводятся с целью проверить согласованность разных научных теорий и их положений, и вычислительные эксперименты, проводимые с целью получить новые данные, являющиеся результатом расчетов, производимых по сложным математическим моделям и алгоритмам, как правило, с использованием ЭВМ).

Целью нашего исследования являются физические эксперименты, т. е. эксперименты, производимые над реально существующими объектами или явлениями. Хотя часть нижеизложенных методик подходит и для анализа мысленных и прежде всего вычислительных экспериментов.

Обобщая известные определения эксперимента и ограничиваясь только физическими экспериментами, причем в самом широком смысле, можно определить комплекс, т. е. систему, с минимальным набором элементов, необходимых для осуществления эксперимента в целях получения опытных данных. Такими компонентами, составляющими систему с названием «эксперимент», являются:

- экспериментатор — человек, получающий новые знания в виде опытных данных через свои чувства, часто обостренные и усиленные при помощи средств измерений, средств преобразования измерительной информации, средств образного представления данных, средств хранения данных и т. п.;

- объект экспериментального исследования — реально существующий физический объект или реально существующее явление, причем любой природы (физической, экономической, социальной и т. д.);
- окружающая среда — условия проведения эксперимента, воздействующие на объект экспериментального исследования и определяющие или изменяющие свойства экспериментально изучаемого объекта.

Связи и взаимное влияние указанных элементов схематично представлены на рис. 1.1.

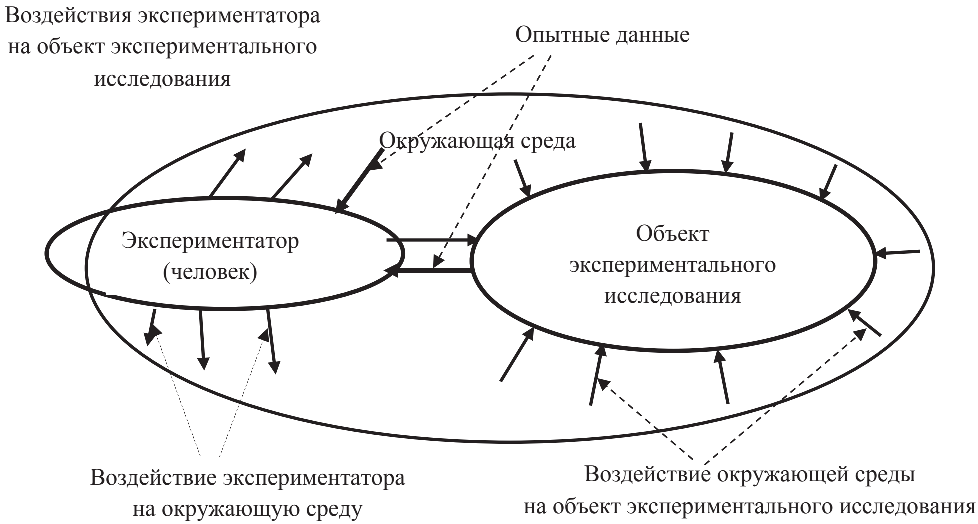


Рис. 1.1. Взаимодействие основных компонентов экспериментальной системы

Особенностью эксперимента является то, что экспериментатор (исследователь), с одной стороны, является частью окружающей среды, оказывающей воздействие на объект эксперимента, с другой стороны, он может воздействовать и на окружающую среду, причем и то и другое воздействие может быть целенаправленным. Кроме того, у экспериментатора есть возможность получать информацию как о свойствах окружающей среды, воздействующих на объект, так и о свойствах исследуемого объекта. Такая информация обычно и называется опытными данными.

Учитывая системообразующие составляющие эксперимента и их связи, взаимодействия, можно дать следующее определение: эксперимент (физический) — это вид деятельности человека, направленный на изучение свойств реально существующих объектов или явлений, находящихся под воздействием окружающей среды.

В дальнейшем будем понимать эксперимент именно в такой, наиболее широкой, трактовке.

Приведенному определению соответствует очень широкий спектр практической человеческой деятельности: начиная от проведения сложного научного эксперимента видным ученым на специально созданной замысловатой экспериментальной установке по изучению какого-то сложного неизвестного ранее явления или объекта и от текущих измерений, производимых в промышленности в ходе контроля за технологическим процессом или характеристиками выпускаемой продукции, и заканчивая самыми простыми измерениями и наблюдениями, широко производимыми человеком в бытовых условиях (рост и вес человека, длина комнаты, время пути на работу и т. п.).

Такое обобщение разноплановых экспериментов, производимых над разнообразными по природе и сути явлениями и объектами, позволяет сформировать обобщенный, универсальный подход к обработке и анализу опытных данных, получаемых в этих экспериментах. Именно такой подход, не учитывающий конкретную физическую или иную природу опытных данных, лежит в основе современной теории эксперимента, теории вероятностей и математической статистики, тех математических методов, которые наиболее широко применяются для анализа и обработки опытных данных.

Элементарной частью эксперимента является опыт.

По ГОСТ 24026–80 **опыт** — воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.

Эксперимент может содержать только один опыт, несколько (серию) опытов или некоторый набор серий опытов. При этом важно, чтобы условия проведения каждого опыта соответствовали бы цели проведения эксперимента, т. е. повторяли (воспроизводили) условия, важные с точки зрения конкретного эксперимента.

С точки зрения характера, структуры опытных данных, их принципиальных свойств и, следовательно, порядка их обработки различают два класса экспериментов — качественный и количественный.

Качественный эксперимент — это эксперимент, предназначенный и проводимый для выявления (установления):

- самого факта существования некоторого явления;
- факта связи двух или более явлений;
- факта наличия у объекта некоторого свойства;
- факта наличия связей свойств объекта или объектов;
- вероятностных свойств характеристик рассматриваемого объекта или явления.

Опытные данные, полученные в результате проведения качественного эксперимента, называют качественными опытными данными или опытными данными в качественном виде. Такие данные представляют собой чаще всего словесное описание явления или связи явлений, словесное описание некоторого свойства (свойств) объекта или связи разных свойств объекта (объектов).

Пример 1.1. Если на гладкой бочке валков прокатать образец с прямоугольным поперечным сечением, то можно заметить, что ширина образца увеличилась. В результате такого эксперимента установлен факт: обжатие прокатываемой полосы по высоте приводит к ее уширению. В чем причина и насколько влияет обжатие на уширение, качественный эксперимент ответа не выявляет. Нет ответа на этот вопрос и в опытных данных.

Результат качественного эксперимента, отвечающий вышеперечисленным целям, часто обобщают термином **событие**, а опыты, входящие в состав такого эксперимента, называют **испытаниями**, подчеркивая тем самым их специфичность. При этом предполагается, что событие, ожидаемое в результате эксперимента, может произойти (или обязательно произойдет), а может и не произойти (или обязательно не произойдет). Для того чтобы охарактеризовать возможность реализации рассматриваемого события, используют понятие *вероятность этого события*.

Количественным экспериментом называется эксперимент, проводимый с целью выявить (установить):

- количественные характеристики рассматриваемого объекта или процесса;
- количественные характеристики внешних условий, при которых происходит рассматриваемое явление или событие;
- зависимость количественной характеристики какого-то свойства рассматриваемого объекта или процесса от количественных характеристик свойств окружающей среды;

- взаимную зависимость разных количественных характеристик изучаемых объектов или процессов и влияния на эти зависимости окружающей среды.

Опытные данные, полученные в результате проведения количественного эксперимента, называют количественными опытными данными или опытными данными в количественном виде. Такие данные могут представлять собой единичные числовые значения, массив числовых значений или упорядоченный набор массивов цифровой информации. При этом числовые значения таких опытных данных чаще всего представляют собой число (количество) эталонных единиц рассматриваемой величины, описывающей рассматриваемое свойство объекта, например, единиц физических величин системы СИ.

Обработка результатов количественного эксперимента дает возможность сформулировать **математическую модель явления**, т. е. систему математических, графических или табличных соотношений между количественными характеристиками внешних условий, влияющих на объект, и количественными характеристиками свойств этого объекта.

Пример 1.2. Если в условиях примера 1.1 за количественную характеристику уширения принять коэффициент уширения, а величину обжатия характеризовать коэффициентом обжатия, то в результате проведения эксперимента можно установить, как значения коэффициента уширения зависят от значений коэффициента обжатия. Установить такую зависимость можно, например, в виде таблицы, графика или аналитической зависимости.

В современных условиях ОМД качественные зависимости свойств различных объектов и явлений обычно известны и закреплены в существующей теории ОМД. Поэтому наиболее часто экспериментальному определению подлежат количественные характеристики изучаемых процессов или явлений ОМД, например, такие как количественные характеристики работы оборудования (сила, скорость, мощность и т. п.), количественные показатели технологического процесса (температура обработки, степень деформации, коэффициент вытяжки и т. п.) или готовой продукции (твердость, предел текучести, относительное удлинение) и т. п. Все эти характеристики выявляются в ходе проведения количественного эксперимента.

Ряд явлений, рассматриваемых в ОМД, принципиально нельзя или нецелесообразно описывать с использованием единиц физических величин, а можно (или целесообразно) отображать сами факты наблюдения этих явлений (или частоту наблюдения этих явлений) в штуках или процентах, например отказ работы оборудования, процент брака, вероятность образования дефекта и т. п.

Четкое разделение экспериментов и их результатов (опытных данных) на качественные и количественные важно не только с точки зрения правильной организации процедур подготовки, получения, сбора и хранения опытных данных, но и с точки зрения правильного применения процедур обработки данных, рассматриваемых ниже.

В 1990–2020 гг. эксперименты проводят во многих областях научного исследования и в различных сферах производства, в общественной жизни, в медицине, сельском хозяйстве и т. д. При этом в качестве объектов эксперимента выступают самые разнообразные по природе и свойствам физические объекты и явления. Что же общего у всех этих объектов, как, по каким свойствам и признакам их можно объединить в целях формализации и включения в единую формальную схему эксперимента, рассмотренную выше? Как это не парадоксально звучит, но наиболее важным общим свойством всех объектов экспериментального исследования является их непознанность, отсутствие теоретической модели этих объектов, достаточной для практического использования. Действительно, вряд ли какой-то рационально мыслящий человек станет экспериментально изучать объект, уже имеющий хорошее проверенное теоретическое описание. Например, какому грамотному человеку придет в голову мысль выкладывать четыре ряда по три яблока в целях проверки известного теоретического положения таблицы умножения 4x3=12? И таких примеров бессмысленности проведения эксперимента при наличии хорошо известной модели объекта исследования можно приводить много.

Поэтому значимым обобщающим признаком всех (и любых) экспериментально изучаемых объектов и явлений является их непознанность (или частичная познанность), отсутствие надежной теоретической модели функционирования объекта исследования. Часто такие непознанные объекты представляют в виде так называемого «черного ящика», т. е. объекта, внутренняя структура которого неизвестна, нет модели, позволяющей предсказать, как изменятся внутренние и внешние свойства объекта под воздействием изменяющихся условий окружающей среды.

В приведенных выше примерах в качестве такого «черного ящика» выступает прокатываемый образец. На этот «черный ящик» воздействует окружающая среда — прокатные валки, обеспечивающие обжатие на определенную величину, и подвод мощности, необходимой для деформации металла. Экспериментатор определил характеристики этой среды как элемент окружающей среды — величину обжатия, температуру деформации, условия трения, скорость прокатки и т. п.

Учитывая техническую направленность данного курса, под понятием объект эксперимента (или черный ящик) по умолчанию будем понимать кокой-то реально существующий физический объект или реально существующее физическое явление.

В результате качественного эксперимента или априорно (до проведения опытов, используя предварительные теоретические знания) можем установить (или предположить), что поведение исследуемого «черного ящика», его внешние, определяемые в эксперименте свойства зависят от каких-то конкретных внешних воздействий. Если такие внешние воздействия как-то формализовать, например, в виде физических величин, то такие формализованные воздействия будем называть **факторами**.

По ГОСТ 24026–80 **фактором** называется переменная величина, по предположению влияющая на результаты эксперимента.

По Р 50.1.040–2002 [10] **фактор** (factor) — предсказывающая переменная, варьируемая в целях определения ее влияния на отклик.

По Р 50.1.040–2002 **предсказывающая переменная** (предиктор, входная переменная) — переменная, которая может помочь объяснить результат эксперимента.

В пояснениях к Р 50.1.040–2002 указано, что термин *предсказывающая переменная* является синонимом термина фактор, но в более широком смысле.

Фактор может влиять на поведение экспериментально изучаемого объекта, на изучаемые количественные характеристики свойств этого объекта, а может и не влиять. Проверить, действительно ли фактор влияет на объект экспериментального исследования, на изменение внешних свойств этого объекта, удается только в ходе проведения эксперимента.

С точки зрения применимости различных методов обработки опытных данных все факторы можно разделить на две группы:

- *количественные* — факторы, величину которых можно охарактеризовать при помощи единиц данной величины (например, сила

прокатки, Н; момент прокатки Н·м; ток главного двигателя прокатного стана, А; и т. д.);
- *качественные* — факторы, не поддающиеся количественному описанию, но каким-то образом формализованные, чаще всего в виде некоторой классификационной структуры (например, тип прокатного стана, материал валков, марка прокатываемой стали и т. д.).

Учитывая тот факт, что в ОМД (да и вообще в технике и технологии) значительно чаще приходится иметь дело с количественными факторами, в дальнейшем по умолчанию, если это не будет оговорено особо, будем полагать, что под термином *фактор* понимается количественный фактор.

Таким образом, в нашей зауженной, конкретизированной трактовке будем понимать, что фактор — это переменная величина (признак, характеристика явления, материала, вещества, организационной структуры, оборудования и т. п.), описывающая один из способов воздействия внешней среды на объект экспериментального исследования. Причем эту величину можно определить качественно (понятийно) и различить количественно (в виде определенного количества единиц физической величины).

В приведенном выше примере 1.2 в качестве основного воздействия, влияющего на изменение свойств объекта (на ширину прокатываемого образца), выступает уменьшение высоты образца, т. е. его обжатие, характеризуемое физической величиной «коэффициент обжатия». Поэтому в данном эксперименте в качестве фактора можно использовать относительную характеристику обжатия — коэффициент обжатия.

Объект экспериментального исследования, обозначенный нами в общем подходе как «черный ящик«, обладает рядом внутренних свойств, определяемых прежде всего природой исследуемого физического объекта или явления. Кроме того, характеристики внутренних свойств объекта зависят и от величин воздействующих на объект факторов. Если произойдет изменение величин факторов, то и свойства объекта экспериментального исследования также изменятся. Следствием внутренних изменений будет являться изменение внешних, наблюдаемых в эксперименте проявлений, или «внешних» свойств объекта. Можно условно сказать, что возникает некоторый «выход» изменяющихся внутренних свойств объекта наружу в виде изменения наблюдаемых в эксперименте величин. Таким образом объект как бы «откликается» на изменение воздействия на него факторов. Если наблюдаемый в эксперименте «выход» удается как-то формализовать, например, описать количественно, то мы получим «отклик» объекта исследования на воздействующий фактор, а если удалось установить зависимость отклика от фактора, то говорят об установлении «функции отклика».

По ГОСТ 24026–80 **откликом** называется наблюдаемая случайная величина, по предположению зависящая от факторов.

По Р 50.1.040–2002 **отклик** (выходная переменная) (response variable) — переменная, представляющая результат эксперимента.

В соответствии с принятым выше делением экспериментов на качественные и количественные, и наблюдаемые в эксперименте отклики так же можно подразделить на качественные и количественные.

Отклик в качественном виде может представлять собой или простую констатацию наличия у объекта исследования некоторого свойства, характеристики, (например, годная продукция — бракованная продукция, лампочка загорелась, при подбрасывании монеты выпал «орел») или принадлежность наблюдаемого свойства объекта некоторой категории классификационной структуры (например, очень холодное — холодное — теплое — и т. д.).

Если же внешние свойства, наблюдаемые в эксперименте, удается описать количественно, используя понятия *физическая величины* и *единица физической величины*, то мы получим наблюдение, отклик объекта исследования на воздействующий фактор в количественной форме.

Учитывая инженерный аспект данной дисциплины в дальнейшем под понятием *отклик* будем подразумевать именно результат эксперимента в количественной форме в виде некоторого конкретного количества единиц (числа единиц) конкретной физической величины.

В ряде экспериментов удается установить функциональную зависимость отклика от фактора — в этом случае говорят об установлении функции отклика.

По ГОСТ 24026–80 **функцией отклика** называется зависимость математического ожидания* отклика от факторов.

---

* Понятие *математическое ожидание* будет рассмотрено ниже в отдельной главе в связи с его большой значимостью.

В приведенном выше примере 1.2 в качестве отклика выступает коэффициент уширения, а в качестве функции отклика — зависимость коэффициента уширения от коэффициента обжатия.

Важной отличительной особенностью экспериментального исследования является то, что по его результатам, как правило, стремятся установить связь, зависимость между факторами, действующими на объект исследования, и его откликами, *причем без явного учета внутренних свойств объекта*. То есть в результате эксперимента строится модель объекта, позволяющая как бы игнорировать его внутренние свойства, концентрирующая внимание только на «внешней стороне», на формальных связях откликов и факторов. В теории систем такие модели называют моделями типа «вход — выход».

В теоретических дисциплинах (физика, механика и т. п.) чаще применяют модели типа «вход — состояние — выход». Такие модели предполагают явный учет (обычно в виде расчета) внутренних свойств (состояния) объекта в зависимости от факторов. При этом для расчета состояния объекта используют теоретические законы и теоретические методы. Именно в таком различии подходов, концепций и состоит принципиальная разница между экспериментальными и теоретическими методами исследований. А это, в свою очередь, приводит к появлению принципиальной разницы между результатами таких исследований, между теоретическими и экспериментальными (аппроксимационными, феноменологическими) моделями объектов исследования.

С практической точки зрения важно классифицировать эксперимент по такому субъективному признаку, как количество исследуемых в нем факторов и откликов.

Если в эксперименте изучается единственная характеристика объекта исследования, только одного отклика, то такой эксперимент (и объект) называется *однокритериальным*, а если два и более отклика — *многокритериальным*.

Если все изучаемые способы внешнего воздействия на объект (явление) ограничиваются одной величиной, одним фактором, то такой эксперимент называют *однофакторным*, если изучается два или больше способов внешнего воздействия — *многофакторным*.

Каждый фактор может принимать в каждом опыте только одно значение из некоторой области своих возможных в данном эксперименте значений. Каждое такое постоянное в опыте значение будем называть **уровнем фактора**.

По ГОСТ 24026–80 **уровень фактора** — фиксированное значение фактора относительно начала отсчета.

По Р 50.1.040–2002 **уровень фактора** — потенциальная установка, значение или назначение фактора.

Полный, определенный, однозначный и фиксированный набор конкретных уровней всех факторов (каждого фактора на своем собственном уровне) определяет одно конкретное состояние «черного ящика» из множества его возможных состояний. А конкретное состояние объекта, как следствие, формирует единственное и однозначно определенное значение отклика. Таким образом, конкретный, полный (и это очень важно) набор факторов, находящихся на конкретных уровнях, определяет единственно возможное, т. е. конкретное, значение отклика. Если абсолютно все факторы, действительно влияющие на объект экспериментального исследования, стабилизированы на конкретных уровнях, то стабильно и значение отклика.

Важное значение при анализе и проведении эксперимента имеют следующие два обстоятельства:

- имеет ли экспериментатор возможность активно вмешиваться в ход проведения эксперимента, *управлять* значениями факторов, т. е. назначать и поддерживать значения факторов на заданных уровнях;
- имеет ли экспериментатор возможность *контролировать* процесс эксперимента путем измерения действительных значений факторов, влияющих на объект исследования.

Возможность осуществлять в эксперименте управление уровнем факторов и контроль над ним зависит от многих причин как объективного, так и субъективного свойства. Вот некоторые из них:

- степень влиятельности фактора на отклик — для разных факторов она объективно разная, часто слабо влияющими факторами не управляют и не контролируют их фактический уровень;
- мнение экспериментатора о степени влиятельности фактора — часто оценивается экспериментатором субъективно;
- техническая возможность управления и контроля — наличие технических средств управления уровнями факторов и метрологических средств контроля этих уровней;
- организационная возможность управления и контроля;
- стоимость управления и контроля и другие обстоятельства.

Наличие этих и других причин и ограничений приводит к тому, что в реальном эксперименте количество контролируемых и (или) управляемых факторов всегда ограничено. Для контроля и управления выбираются наиболее влиятельные факторы (по мнению экспериментатора, которое не всегда достаточно обосновано). Остальные (неконтролируемые и неуправляемые) факторы считаются слабо влияющими, несущественными, и их воздействие на отклик часто называют «шумом эксперимента».

Поскольку каждый признак (управляемость и контролируемость) имеет только по два уровня, то из их комбинаций можно составить только четыре группы факторов:

- управляемые и контролируемые факторы (обозначим x_i);
- управляемые, но неконтролируемые факторы (d_i);
- неуправляемые, но контролируемые факторы (h_i);
- неуправляемые и неконтролируемые факторы (δ_i).

Здесь индексом i обозначен порядковый номер фактора в соответствующей группе. Общее количество факторов в каждой группе неодинаково.

Целесообразность оперативного использования и учета в эксперименте контролируемых факторов (факторы 1-й и 3-й групп x_i и h_i) не вызывает сомнений. Влияние именно этих факторов на объект экспериментального исследования обычно и изучается в ходе проведения эксперимента.

А вот влияние факторов 2-й группы (управляемые, но неконтролируемые d_i) при проведении эксперимента необходимо как-то исключить. Это вполне возможно сделать, т. к. факторы управляемые, т. е. имеется возможность управления ими, а значит, есть возможность, как минимум, зафиксировать их на каком-то одном стационарном уровне. Использование факторов 2-й группы в эксперименте (изменение уровней этих факторов) абсолютно лишено смысла и может привести в лучшем случае к нулевому результату, а в худшем — к возникновению аварийной ситуации в ходе ведения эксперимента.

Факторы 4-й группы (неуправляемые и неконтролируемые δ_i) исключить из рассмотрения нельзя. Они не поддаются управлению, а значит, в отличие от факторов 2-й группы d_i зафиксировать их нельзя и они в ходе эксперимента будут изменяться по своим законам, в общем случае неизвестным экспериментатору. Проконтролировать значения факторов δ_i в каждом опыте также нельзя или по организационно-техническим причинам, или в силу предположения о малости степени их влияния на отклик. Они хоть и слабо, но влияют на результат эксперимента, на величину отклика. И если направленность воздействия множества таких факторов на отклик случайно совпадет, то изменение отклика может оказаться достаточно заметным. Поэтому, несмотря на отсутствие возможности контроля значений этих факторов, необходимо найти способ учета такого влияния. Как это сделать, будет рассмотрено ниже при изучении методов теории вероятности и математической статистики.

Если обозначить через Y отклик и использовать указанные выше обозначения факторов, то схематично, упрощенно обобщенное экспериментальное исследование можно формализовать и изобразить в виде следующей так называемой системной (кибернетической) модели (рис. 1.2).

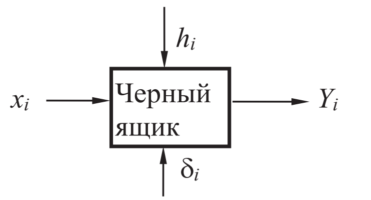


Рис. 1.2. Системная модель экспериментального исследования

Пример 1.3. Рассмотрим с позиций формализованного подхода, соответствующего схеме на рис. 1.2, эксперимент по холодной прокатке прямоугольной полосы на гладкой бочке валков, описанный выше в примерах 1.1 и 1.2.

В качестве единственного оклика Y, как и ранее, будем рассматривать коэффициент уширения (это однокритериальный эксперимент).

Управляемый и контролируемый фактор X в эксперименте также один — это коэффициент обжатия $1/\eta$. Управлять коэффициентом обжатия $1/\eta$ можно путем назначения разных обжатий в каждом опыте (в каждом проходе прокатки).

Основываясь на теоретических представлениях о процессе сортовой прокатки, можно выделить еще ряд сильно влияющих факторов: факторы формы очага деформации l/h (отношение длины очага деформации к его средней высоте) и l/B (отношение длины очага деформации к его средней ширине); коэффициент трения на контактной поверхности μ, температура прокатки t, материал валков M и материал прокатываемой полосы m, скорость прокатки V. Распределим указанные факторы на группы по признаку возможности их контроля и управления ими.

К группе 2 — « управляемые, но неконтролируемые факторы d_i» — отнесем факторы μ, t, M, m и V. В данном эксперименте изменять значения этих факторов нет необходимости, т. к. его цель — только изучение влияния обжатия на уширение. Поэтому необходимо принять меры для исключения влияния факторов группы d_i на величину отклика, т. е. необходимо исключить их из эксперимента. Для этого зафиксируем их значения во всех опытах на одном и том же уровне: для стабилизации коэффициента трения μ будем обезжиривать валки и поверхность прокатываемой полосы; прокатка осуществляется при комнатной температуре, поэтому температура прокатки t стабильна; будем проводить прокатку на одних и тех же валках для стабилизации M и из металла одной и той же плавки, прошедшего одинаковую подготовку перед прокаткой, что стабилизирует m; зафиксируем и скорость прокатки V в каждом опыте

Факторы формы очага деформации l/h и l/B также в принципе можно стабилизировать, однако на практике это приведет к ряду значительных затруднений и сильно увеличит стоимость эксперимента, т. к. данные факторы через абсолютное обжатие геометрически связаны с коэффициентом обжатия $1/\eta$. Так, для поддержания постоянного l/h при разных значениях коэффициентов обжатия необходимо изготавливать заготовки различной толщины, а для поддержания постоянного l/B — заготовки разной ширины. Поэтому при стремлении сократить затраты на эксперимент целесообразней отнести факторы l/h и l/B к группе 3 — «неуправляемые, но контролируемые h_i».

Кроме перечисленных сильно влияющих факторов, на результат каждого опыта будет оказывать влияние очень большое количество «неуправляемых и неконтролируемых факторов δ_i». Это — слабо влияющие факторы, контроль которых производить проблематично и нецелесообразно в силу малости их влияния. К таким факторам можно отнести, например, колебания химического состава образцов в каждом опыте, которые связаны с обязательным наличием ликваций в металле одной и той же плавки, образующихся при его разливке и кристаллизации; колебания сопротивления деформации прокатываемого металла, которые связаны как с колебаниями химического состава образцов, так и с колебаниями параметров подготовки заготовок; влажность воздуха, которая влияет на коэффициент трения и обычно не контролируется; колебание шероховатости поверхности заготовок образцов и прокатных валков, которое неизбежно появляется при механической обработке; колебание размеров заготовок за пределами точности инструмента, применяемого при их обработке и контроле; колебание напряжения в сети привода прокатного стана, которое неизбежно приводит к колебаниям скорости вращения валков и т. д. Все эти факторы влияют слабо, с разной степенью интенсивности, но то, что влияют, — несомненно.

Задача эксперимента чаще всего заключается в нахождении связей между откликом и влияющими на него факторами. Количественно такие связи принято описывать при помощи функциональных зависимостей, отражаемых в виде таблиц, графиков или математических выражений. Опытные данные, которые принципиально можно получить в эксперименте, представляют собой первоначально таблицу, в каждой строке или столбце которой зафиксированы значения действующих факторов и величина отклика Y, получаемого при этих уровнях факторов для одного опыта. Так как измерить и зафиксировать можно только контролируемые факторы, в таблицах будут присутствовать только значения факторов 1-й и 3-й групп — x_i и h_i. По данным таблиц можно построить графики зависимостей отклика Y от факторов x_i и h_i и описать полученные кривые при помощи уравнений вида

$$Y = f(x_i, h_i). \tag{1.1}$$

Именно такого рода зависимости используются для описания фундаментальных законов в физике, химии, механике сплошной среды и т. п.

Однако кроме факторов 1-й и 3-й групп — x_i и h_i — в эксперименте на отклик Y воздействуют и факторы 4-й группы — δ_i, значения которых не известны. Поскольку это неконтролируемые и неуправляемые факторы, они не входят в уравнение (1.1). В эксперименте факторы δ_i изменяются каждый по своему собственному закону или закону, не известному экспериментатору или им не контролируемому. Поэтому, с точки зрения экспериментатора, характер изменения этих факторов фактически является случайным. Если повторять опыты при фиксированных значениях факторов x_i и h_i, то по причине самопроизвольной изменчивости уровней факторов δ_i в каждом опыте будут наблюдаться различные значения отклика Y. Так как к группе неуправляемых и неконтролируемых факторов δ_i относят лишь слабо влияющие на отклик факторы (сильно влияющие факторы относят к группе x_i или h_i), то и изменения отклика Y в каждом опыте будут малыми. Зафиксировать такие изменения можно только в случае применения средств измерения отклика Y «достаточной точности».

По этой причине, например, если провести серию опытов, получить по их результатам зависимость вида (1.1), провести расчет по этому уравнению при каких-то значениях факторов x_i и h_i и вновь провести эксперимент при этих же значениях факторов x_i и h_i, а затем сравнить результаты расчета и опытные данные, то выяснится, что опытные данные и результаты расчета не совпадут точно. А значит, уравнение вида (1.1) нельзя признать абсолютно адекватными опытным данным. Это объясняется отсутствием в уравнении (1.1) учета влияния на отклик Y факторов δ_i. Наиболее простым способом учета влияния этих факторов является использование для описания опытных данных уравнения типа

$$Y = f(x_i, h_i) + \varepsilon(\delta_i), \tag{1.2}$$

где величина $\varepsilon(\delta_i)$ является в общем случае некоторой неизвестной функцией от неконтролируемых и неуправляемых факторов δ_i. Функцию ε называют или ошибкой, погрешностью эксперимента (если полагать, что истинным является закон типа (1.1)), или ошибкой, погрешностью расчета (если полагать, что истинными являются опытные данные). При правильной постановке эксперимента (при выявлении и контроле всех сильно влияющих на отклик факторов) и использовании правильной процедуры получения уравнения типа (1.2) значение функции $\varepsilon(\delta_i)$ мало по сравнению со значением отклика Y. Причем значение $\varepsilon(\delta_i)$ тем меньше, чем большее количество факторов переведено из группу δ_i в группы x_i или h_i (т. е. чем большее количество факторов в эксперименте подвергается контролю).

По существу, формально говоря, вся история развития, прогресс науки состоят именно в переводе факторов из группы δ_i в группу x_i или h_i, т. е. развитие науки заключается именно в учете влияния на отклик Y (на результат практической деятельности) все большего и большего количества факторов. Практически, это выражается в открытии новых законов, связывающих контролируемые физические или другой природы величины, новых методов и методик расчетов, учитывающих все большее и большее количество факторов. Но полный учет и контроль всех факторов, действительно влияющих на отклик на практике, вряд ли когда-нибудь будет возможен. Да и практическая целесообразность такого глобального контроля вызывает сомнения в связи с предельной малостью влияния некоторых факторов из группы δ_i на отклик.

Важной особенностью функции $\varepsilon(\delta_i)$ является то, что ее величиной нельзя управлять в эксперименте, ее значение формируется произвольно, случайно, как результат произвольных, случайных значений факторов δ_i в каждом опыте. А с учетом взаимосвязи $\varepsilon(\delta_i)$ и отклика Y, отраженной в уравнении (1.2), также значения Y приобретают те же свойства, что и у $\varepsilon(\delta_i)$. Данные свойства, как правило, весьма специфичны; их обозначают термином *вероятностные свойства случайной величины*. Данным свойствам будут посвящены последующие разделы.

Возможность управления уровнями факторов в эксперименте является важной особенностью не только самих факторов, но и эксперимента в целом. При этом открывается ряд возможностей по уменьшению затрат на проведение эксперимента, его оптимизации, повышению точности выявляемых экспериментальных зависимостей и закономерностей и достижения ряда других целей.

Если все контролируемые в эксперименте факторы неуправляемы — факторы h_i, то такой эксперимент называют **пассивным экспериментом.**

По ГОСТ 24026–80 **пассивным экспериментом** называется эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются.

В пассивном эксперименте экспериментатор только наблюдает за изучаемым неуправляемым процессом, не вмешиваясь в ход каждого опыта. В этом случае формальная математическая модель экспериментально исследуемого объекта, построенная по данным эксперимента, записывается в следующем виде:

$$Y = f(h_i) + \varepsilon(\delta_i).$$

Если же неуправляемых факторов h_i нет или они переведены в разряд неконтролируемых δ_i, а в эксперименте используются только управляемые и контролируемые факторы x_i, то такой эксперимент называют **активным экспериментом**.

По ГОСТ 24026–80 **активным экспериментом** называется эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем.

Для активного эксперимента математическая модель объекта исследования имеет вид

$$Y = f(x_i) + \varepsilon(\delta_i). \tag{1.3}$$

Если есть возможность управлять значениями факторов в эксперименте, назначать их уровни в каждом опыте по собственному желанию, то очевидно, что проводить такое назначение, управление следует некоторым оптимальным образом, придерживаясь определенной стратегии, плана действий. Активный эксперимент, как правило, предполагает использование предварительных процедур, получивших название *планирование эксперимента*. Под **планированием эксперимента** понимается процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью и (или) с наименьшими затратами.

По ГОСТ 24026–80 **план эксперимента** — совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

По ГОСТ 24026–80 **планирование эксперимента** — выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Чаще всего целями планирования эксперимента являются следующие:

- установление границ интервала, в который попадет некоторое случайное, экспериментально определяемое значение с заданной степенью уверенности — это так называемое оценочное планирование эксперимента;
- получение математической модели объекта экспериментального исследования в виде уравнения (1.3) — это планирование так называемого интерполяционного или регрессионного эксперимента;
- отыскание такого сочетания факторов x_i, которое обеспечивает оптимальное (как правило, экстремальное) значение некоторой целевой функции или параметра оптимизации. При этом в качестве целевой функции выступает или отклик эксперимента Y, или некоторая функция, зависящая от отклика. Такое планирование эксперимента называют планированием экстремальных или поисковых экспериментов.

2. Случайная величина и способы ее описания

2.1. Понятие «случайная величина»

Важной особенностью реальных экспериментов является то, что в подавляющем большинстве случаев объекты исследования подвержены воздействию очень большого количества неконтролируемых факторов $\delta_н$. Величина этих факторов и степень их воздействия на объект исследования неизвестны, а в значительной части случаев воздействие каждого из таких факторов и не интересно, поскольку к этой группе факторов относят обычно слабо влияющие факторы. Это объективное обстоятельство вносит в результаты эксперимента некоторый элемент неопределенности, имеющий вероятностное содержание. Теми же причинами объясняется появление отклонений $\varepsilon(\delta_i)$, которые носят случайный, вероятностный характер. В соответствии с принятой моделью эксперимента и представлением отклика в виде математической модели (1.2) случайный, вероятностный характер отклонений $\varepsilon(\delta_i)$ приводит к тому, что и наблюдаемые в эксперименте величины откликов также приобретают случайный, вероятностный характер. Так как ситуации наблюдения такого рода величин с вероятностными характеристиками встречаются на практике повсеместно и очень часто, то для описания этих величин введено специальное понятие, специальный класс величин — случайные величины. Причем в инженерной практике подавляющее большинство величин, получаемых в результате проведения экспериментальных исследований, являются именно случайными величинами (а к таким исследованиям в рамках принятого обобщенного подхода можно отнести и большинство измерений, производимых в производственных условиях для реализации технологических, контрольных, управленческих и других функций).

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **случайная величина (**random variable; variate) — переменная, которая может принимать любое значение из заданного множества значений и с которой связано распределение вероятностей.

Все случайные величины, встречающиеся в окружающей действительности, делят на дискретные (прерывные) и непрерывные.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **дискретная случайная величина** — случайная величина, которая может принимать только отдельные значения.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **непрерывная случайная величина** — случайная величина, которая может принимать любые значения из конечного или бесконечного интервала.

При дальнейшем изложении под термином *случайная величина* будем по умолчанию понимать *непрерывную случайную величину*, т. к. именно эти величины наиболее широко распространены в инженерной практике.

Важнейшей особенностью любой случайной величины является то, что ее конкретное числовое значение невозможно заранее предсказать со 100%-ной уверенностью. Просто по определению (по ГОСТ Р 50779.10–2000) случайная величина может принимать любое (т. е. неизвестное заранее) значение.

Было замечено, что в каждом конкретном опыте дискретная случайная величина может приобретать некоторые числовые значения с большей вероятностью, а другие — с меньшей вероятностью. Для непрерывных величин также характерны различные вероятности попадания экспериментальных результатов в различные интервалы значений. Кроме того, как правило, область возможных значений конкретной случайной величины так или иначе ограничена.

Случайная величина характеризуется:

- областью возможных значений;
- возможностью приобретать любые значения из области возможных значений;
- различной вероятностью приобретения различных значений.

Именно эти три обстоятельства и положены в основу применяемых в настоящее время способов ее описания.

Принципиально можно выделить два способа описания случайных величин, используемые в настоящее время.

Первый способ. Производится описание так называемого вероятностного распределения случайной величины. Данный способ предполагает очень подробное рассмотрение вероятностных особенностей случайной величины. Описывается по существу то, какова вероятность наблюдения различных значений случайной величины во всей области ее возможных значений. Для такого описания используют понятие функции распределения или плотности распределения.

Второй способ. Производится описание наиболее важных свойств случайной величины (чаще всего важных с практической точки зрения). Данные свойства отражают при помощи специальных показателей, специальных функций, получивших общее название числовых характеристик случайной величины». Для каждой конкретной экспериментально наблюдаемой случайной величины эти числовые характеристики принимают конкретные числовые значения (отсюда и название — числовые характеристики).

Существенным отличием этих способов является степень подробности описания случайной величины и математическая сложность их использования. Оба способа описывают одно и то же (случайную величину), поэтому вполне естественно, что они взаимосвязаны и не являются конкурирующими, а лишь дополняют друг друга, давая возможность исследователю использовать наиболее подходящий способ для достижения конкретных целей исследования с рациональными затратами.

Первый наиболее подробный способ описания случайных величин фактически сводится к рассмотрению и использованию так называемого закона распределения вероятности наблюдения различных значений случайной величины. В литературе, кроме указанного термина, еще используют разные сокращенные термины: закон распределения, распределение вероятности или просто распределение.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **распределение (вероятностей)** — функция, определяющая вероятность того, что случайная величина примет какое-либо заданное значение или будет принадлежать заданному множеству значений.

При установлении закона распределения вероятности необходимо каждому значению случайной величины из области возможных значений поставить в соответствие некоторую величину вероятности наблюдения именно этого значения или величину вероятности наблюдения этого значения в некотором известном, заданном диапазоне значений.

При такой достаточно широкой трактовке понятия *закон распределения вероятности* можно разработать и использовать большое множество функций различного вида, связывающих значение вероятности со значением случайной величины. Но в практике математической статистики широко используют прежде всего два вида таких функций, называемых в соответствии с ГОСТ Р 50779.10–2000 функцией распределения и плотности распределения (в литературе по математической статистике можно встретить другие, отличные от стандартных, наименования этих же функций).

2.2. Функция распределения

Понятие *функция распределения* является одним из центральных, основополагающих понятий в системе вероятностных подходов к описанию случайных величин, в теории и практике математической статистики и в обработке данных эксперимента.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **функция распределения** — функция, задающая для любого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x:

$$F(x) = P(X \le x). \tag{2.1}$$

Для лучшего понимания сути функции распределения и использования ее для практических целей распишем подробно существо элементов, составляющих выражение (2.1), и возможные трактовки этих элементов:

- X — случайная величина, т. е. величина, которая, по определению, может принимать любые значения (и больше конкретного числового значения x, и меньше x, и равные x). Но в данном определении нас интересуют прежде всего те значения случайной величины X, которые в ходе проведения эксперимента окажутся меньше или равными x;
- x — переменная, аргумент функции $F(x)$, принимающая в каждом из конкретных опытов или расчетов конкретное числовое значение (например, $x = 3{,}65$), с которым сравниваются значения случайной величины X, полученные, например, в ходе проведения эксперимента или определенные каким-либо другим способом;

- $X \le x$ — условие, разделяющее все возможные значения случайной величины X на две группы: значения X меньшие или равные конкретному числу x и значения X большие, чем x. В данном определении нас интересуют, прежде всего, значения, которые удовлетворяют условию $X \le x$, т. е. относятся к первой из рассмотренных групп. Поэтому в данном определении запись $X \le x$ можно трактовать как событие, заключающееся в том, что в очередном опыте наблюдалось (или будет наблюдаться) значение случайной величины X, которое не превышает конкретное число $\boldsymbol{x}$ и для которого определяется величина функции распределения $F(x)$. Следует особо отметить, что условие $X \le x$ также не накладывает каких-либо ограничений на область возможных значений X, как это условие не накладывает ограничений и на область определения функции распределения $F(x)$;
- $P(X \le x)$ — вероятность события $X \le x$. Запись $P(X \le x)$ можно трактовать так: $P(X \le x)$ — это число от 0 до 1, характеризующее возможность наблюдения в очередном опыте значений случайной величины X, не превышающих конкретного числа x.

С учетом приведенных трактовок составляющих выражения (2.1) для конкретного числа x функция распределения $F(x)$ устанавливает конкретное числовое значение из диапазона от 0 до 1, равное вероятности непревышения случайной величиной X этого значения x. Поэтому, например, запись $F(3{,}65) = 0{,}83$ означает, что случайная величина X не превысит значение 3,65 с вероятностью 0,83 (или с вероятностью 83 %, что одно и то же). В конечно-численной форме эту же запись можно понимать, например, так: из 100 проведенных измерений случайной величины X примерно 83 измерения оказались (или окажутся) меньше или равными 3,65.

С эмпирической точки зрения, условие $X \le x$ означает, что для любых $x_1 < x_2$ при расчете вероятности $F(x_1) = P(X \le x_1)$ следует использовать полученные опытные значения случайной величины X, отвечающие только условию $X \le x_1$, а при расчете $F(x_2) = P(X \le x_2)$ необходимо использовать опытные значения этой случайной величины, отвечающие как условию $X \le x_1$, так и условию $x_1 < X \le x_2$, т. е. при расчете $F(x_2)$ количество используемых значений будет больше. А это означает, что при увеличении аргумента происходит интегральное накопление опытных значений, отражаемое в увеличении значения функции распределения $F(x)$. Поэтому функцию $F(x)$ часто называют *интегральной функцией распределения* или *интегральной функцией распределения вероятностей* случайной величины, при этом учитывается накопительный, интегрирующий характер данной функции.

Свойства функции распределения $F(x)$:

- $F(x)$ является неубывающей функцией от x, т. е. для любых двух чисел x_1 и x_2 при $x_1 < x_2$ удовлетворяется условие $F(x_1) \le F(x_2)$. Это означает, что вероятность непревышения случайной величиной X меньшего значения x_1 будет меньше или равна вероятности непревышения той же случайной величиной большего значения x_2.
- $F(-\infty) = 0$. Не существует действительных чисел меньше, чем $-\infty$, а значит, и вероятность события, заключающегося в том, что в эксперименте будет получено число меньшее или равное $-\infty$, равна нулю, поэтому $F(-\infty) = P(X \leqslant -\infty) = 0$.
- $F(+\infty) = 1$. Все существующие действительные числа меньше, чем $+\infty$, а значит, и вероятность события, заключающегося в том, что в эксперименте будет получено число большее, чем $+\infty$, равна нулю, все 100 % опытных значений будут меньше $+\infty$, поэтому $F(+\infty) = P(X \leqslant +\infty) = 1$.
- Для любых двух чисел x_1 и x_2 при $x_1 < x_2$ разность значений функции распределения для этих чисел $F(x_2) - F(x_1)$ равна вероятности попадания значения случайной величины в диапазон значений, ограниченный x_1 и x_2:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1) = P(x_1 < X \le x_2), \qquad (2.2)$$

что следует из схемы, приведенной на рис. 2.1.

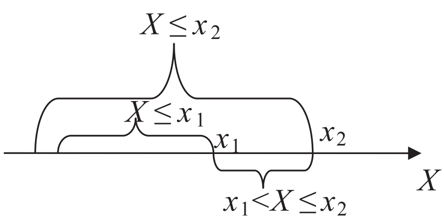


Рис. 2.1. Схема для определения свойств функции распределения

Для каждой конкретной случайной величины функция распределения, в общем виде определенная выражением (2.1), имеет свой совершенно конкретный вид и, как всякая функциональная зависимость, может быть описана одним из трех способов:

- в виде графика зависимости $F(x)$ (линия на координатной плоскости X–0–$F(x)$);
- в табличном виде, т. е. каждому дискретизированному числовому значению аргумента x ставится в соответствие конкретное числовое значение функции распределения $F(x)$ (см., например, таблицы функций распределения, приведенные в прил. 1–4);
- в виде конкретной аналитической зависимости, связывающей значения случайной величины X и вероятности непривышения этого значения $P(X \leq x) = F(x)$ в виде математического выражения.

Конечно, наиболее компактной формой представления функции распределения является использование 3-го способа описания — аналитической зависимости, но для практического использования в ряде случаев (причем на практике достаточно часто) удобней использовать или табличный, или графический способ описания.

Для конкретной случайной величины конкретный вид функции распределения можно установить двумя путями: 1) используя некоторые теоретические предпосылки, допущения, упрощения и известные математические приемы формирования функций (т. е. используя так называемый «теоретический» подход к построению функций); 2) используя опытные данные, полученные в ходе проведения эксперимента (так называемый «эмпирический» подход к построению функций).

Практической задачей получения эмпирической функции распределения является задача установления связи, соответствия между конкретными значениями x_i случайной величины X и вероятностями P_i непревышения X этих значений, которая и принимается за эмпирическое значение функции распределения.

Набор числовых значений x_i случайной величины X можно получить в ходе измерения X при проведении эксперимента, а значения соответствующих вероятностей P_i следует рассчитать, используя статистическое определение эмпирической вероятности

$$P_i = \frac{n_i}{N}, \tag{2.3}$$

где n_i — общее количество опытных значений, отвечающих условию $X \leq x_i$; N — общее количество (объем) всех опытных данных, полученных в ходе проведения эксперимента.

Алгоритм построения эмпирического графика функции распределения

Исходными данными для построения графика функции распределения является набор из N опытных значений x_i любой случайной величины X:

1. Опытные значения располагают в вариационный ряд по возрастающей, так чтобы

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N. \tag{2.4}$$

2. Для каждого опытного значения x_i подсчитывают количество опытных значений n_i, отвечающих условию $X \le x_i$. При подсчете значений n_i нетрудно заметить, что n_i будет совпадать с порядковым номером соответствующего опытного значения x_i, т. е. $n_i = i$.

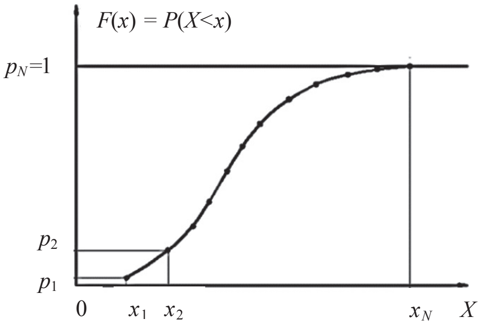
3. Для каждого опытного значения x_i по выражению (2.3) подсчитывают статистическую вероятность непревышения этого значения P_i.

4. На координатной плоскости X-0-$F(x)$ откладывают все N двумерных точек с координатами (x_i, P_i).

5. Если через полученные точки провести плавную кривую, то будет построен эмпирический график функции распределения для непрерывной случайной величины X (рис. 2.2, *а*).

Если полученные точки соединить ступенчато отрезками вертикалей и горизонталей, проходящих через эти точки, то будет построен эмпирический график функции распределения для дискретной случайной величины X (рис. 2.2, *б*).

а



б

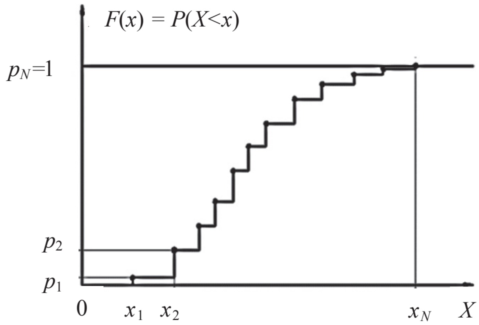


Рис. 2.2. Примеры эмпирических графиков функции распределения:
а — для непрерывной случайной величины; *б* — для дискретной случайной величины

2.3. Плотность распределения

Функция распределения $F(x)$, рассмотренная в п. 2.2, является одним из наиболее информативных способов описания вероятностных свойств случайной величины. В то же время в ряде случаев важно не само значение функции распределения, а то, насколько интенсивно изменяется ее значение при различных значениях аргумента этой функции x, насколько интенсивно изменяется вероятностная характеристика рассматриваемой случайной величины при различных значениях x. Для этих целей, как и для всякой другой функции, можно использовать первую производную от функции распределения $F(x)$, имеющую специальное название плотность распределения.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **плотность распределения** — первая производная, если она существует, функции распределения непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{2.5}$$

Функцию $f(x)$ часто называют *дифференциальной функцией распределения вероятностей* случайной величины, учитывая способ ее определения.

Плотность распределения $f(x)$ характеризует скорость изменения функции распределения $F(x)$ при изменении значений случайной величины X и поэтому, в ряде ситуаций, позволяет более наглядно охарактеризовать вероятностные свойства X.

Поскольку функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, то ее первая производная (плотность распределения) удовлетворяет условию $f(x) \geq 0$.

Как и график функции распределения $F(x)$, график плотности распределения $f(x)$ также имеет геометрическое толкование вероятности, но в неявном виде. Для выявления вероятностного содержания графика плотности распределения $f(x)$ преобразуем выражение (2.5) к виду

$$f(x)dx = dF(x)$$

и проинтегрируем его на конечном участке изменения случайной величины X длиной $\Delta x = x_2 - x_1$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{F(x_1)}^{F(x_2)} dF(x),$$

откуда получим

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1). \tag{2.6}$$

С учетом геометрического смысла определенного интеграла функции левая часть выражения (2.6) $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком плотности распределения $f(x)$, снизу — осью абсцисс X и по бокам — вертикалями x_1 и x_2 (рис. 2.3).

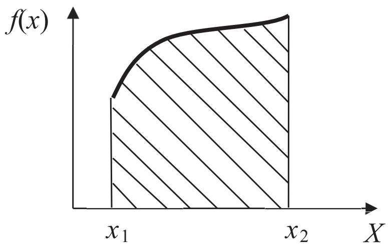


Рис. 2.3. Геометрический смысл графика плотности распределения

Правая часть равенства (2.6) представляет собой разность значений функции распределения для числовых значений случайной величины x_1 и x_2, и, согласно свойству (2.2), равную вероятности попадания случайной величины X в диапазон значений от x_1 до x_2: $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \le x_2)$ (см. рис. 2.1).

Таким образом, после подстановки получим

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < X \le x_2), \tag{2.7}$$

т. е. геометрический смысл графика плотности распределения случайной величины X следующий: площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции распределения $f(x)$, снизу осью абсцисс X и вертикалями x_1 и x_2, равна вероятности попадания случайной величины X в диапазон значений от x_1 до x_2.

Из анализа выражения (2.7) следуют свойства плотности распределения:

1. Если принять $x_1 = -\infty$ и $x_2 = +\infty$, то мы обязательно охватим весь диапазон возможных значений случайной величины X. Вероятность попадания значения X в такой диапазон равна 1: $P(-\infty < X \leq +\infty) = 1$, откуда с учетом геометрической трактовки выражения (2.7) следует, что площадь всей фигуры, находящейся под кривой плотности распределения, на всем диапазоне возможных значений случайной величины X всегда равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X \leq +\infty) = 1.$$

Если реальный диапазон возможных значений случайной величины X конечен и, например, ограничен конечными числовыми значениям $x_1 = a$ и $x_2 = b$, то суть от этого не меняется — площадь всей фигуры, находящейся под кривой графика плотности распределения в диапазоне от a до b, также равна 1:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = P(a < X \leq b) = 1.$$

2. Если принять $x_1 = x_2$, то для правой части равенства (2.3) получим $P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_1) = P(X = x_1)$, т. е. вероятность того, что случайная величина примет конкретное числовое значение x_1. Для левой части равенства $\int_{x_1}^{x_1} f(x)\,dx = 0$ — площадь фигуры нулевой ширины (от x_1 до x_2) равна нулю. Таким образом, получим

$$P(X = x_1) = \int_{x_1}^{x_1} f(x)\,dx = 0.$$

Отсюда следует, что вероятность принятия непрерывной случайной величиной конкретного числового значение равна нулю. Данное свойство непрерывных случайных величин называют парадоксом вероятности.

Однако как только мы от «нулевой ширины» интервала (от вертикали на графике плотности распределения) переходим к сколь угодно малой величине отрезка $\Delta x = x_2 - x_1$, то сразу же на графике плотности распределения возникает некоторая площадь, а значит, и вероятность становится ненулевой. Поэтому, математически не строго, можно понимать, что значение плотности распределения $f(x)$ для конкретного числового значения x характеризует (не равно, а именно характеризует) вероятность попадания значения случайной величины X в ближайшую окрестность x. Значит, чем больше высота графика плотности распределения для конкретного x, тем больше вероятность попадания значения случайной величины X в окрестность этого значения.

Подставим определение плотности распределения (2.5) в общеизвестное математическое определение первой производной функции

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}.$$

Если перейти от бесконечно малого $\Delta x\to 0$ к конечному интервалу Δx, то и соответствующее изменение функции распределения $\Delta F(x)$ также будет конечным и для этого случая можно записать

$$f(x)\approx\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}. \tag{2.8}$$

Как и ранее, определим ширину интервала Δx как разность между произвольными значениями x_1 и x_2 случайной величины X: $\Delta x = x_2 - x_1$, причем примем $x_2 > x_1$. Тогда соответствующее этому Δx изменение функции распределения

$$\Delta F(x)=F(x_2)-F(x_1)\geq 0. \tag{2.9}$$

Учитывая вероятностный смысл функции распределения (2.1), можно записать

$$\Delta F(x)=F(x_2)-F(x_1)=P(X\leq x_2)-P(X\leq x_1).$$

Разность вероятностей непревышения x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$ равна вероятности попадания случайной величины X в интервал от x_1 до x_2, поэтому

$$\Delta F(x)=P(x_1<X\leq x_2). \tag{2.10}$$

Из выражения (2.8) можно получить

$$f(x)\cdot\Delta x\approx\Delta F(x). \tag{2.11}$$

Подставив в (2.11) $\Delta F(x)$ из выражения (2.10), получим

$$f(x)\cdot\Delta x\approx P(x_1<X\leq x_2). \tag{2.12}$$

В общем случае для каждого значения случайной величины X из любого интервала $\Delta x = x_2 - x_1$ значение плотности распределения $f(x)$ свое, поэтому в выражении (2.9) величина $f(x)$ представляет собой среднее значение плотности распределения $f(x)_{\text{ср}}$ для этого интервала.

Для того чтобы не исказить вероятностный смысл графика плотности распределения, среднее значение $f(x)_{\text{ср}}$ рассчитаем из условия равенства площадей фигур $\omega_{\text{кр}} = \omega_{\text{пр}}$, построенных на основании Δx (рис. 2.4)

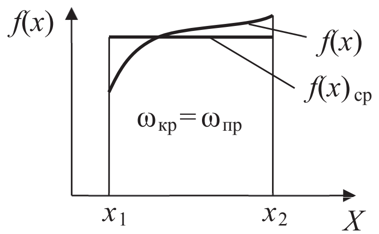


Рис. 2.4. Усреднение значения плотности распределения на интервале: $\omega_{\text{кр}}$ — площадь криволинейной трапеции; $\omega_{\text{пр}}$ — площадь прямоугольника

При таком подходе к определению среднего значения приближенное равенство (2.12) преобразуется в точное равенство

$$f(x)_{\text{ср}} \cdot \Delta x = P(x_1 < X \le x_2).$$

Расчет вероятности $P(x_1 < X \le x_2)$ попадания случайной величины X в интервал $\Delta x = x_2 - x_1$ можно произвести по-разному, например с использованием опытных данных и статистического определения вероятности (2.3) $P_i = \dfrac{n_i}{N}$, где n_i — количество опытных значений, отвечающих условию $x_1 < X \le x_2$; N — общее количество опытных данных (объем выборки).

Приведенную геометрическую трактовку вероятностного содержания плотности распределения $f(x)$ можно использовать для построения графика плотности распределения случайной величины X по опытным данным.

Алгоритм построения эмпирического графика плотности распределения

Для построения эмпирического графика плотности распределения можно использовать те же исходные опытные данные, которые использовались при построении эмпирического графика функции распределения (см. подглаву 2.1). Это — набор из N опытных значений x_i любой случайной величины X:

1. Опытные значения располагают в вариационный ряд по возрастающей в соответствии с условием (2.4) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$.

2. Рассчитывают ширину интервала варьирования опытных данных $L = x_N - x_1$.

3. Весь размах варьирования опытных данных разбивают на k элементарных интервалов одинаковой ширины $\Delta x = \dfrac{L}{k}$.

4. Рассчитывают значения левой $x_i^{\text{лев}}$ и правой $x_i^{\text{пр}}$ границ элементарных интервалов: $x_i^{\text{пр}} = x_i^{\text{лев}} + \Delta x$, $x_i^{\text{лев}} = x_{i-1}^{\text{пр}}$, начиная от левой границы первого интервала $x_1^{\text{лев}} = x_1$. За правую границу последнего k-го элементарного интервала принимают последнее опытное значение в вариационном ряду $x_k^{\text{пр}} = x_N$.

5. Для каждого элементарного интервала подсчитывают количество опытных значений n_i, попавших в этот интервал, т. е. количество значений, отвечающих условию $x_i^{\text{лев}} < X \le x_i^{\text{пр}}$. Опытное значение, совпадающее со значением какой-то границы, относят к левому относительно этой границы интервалу.

6. Для каждого элементарного интервала по выражению (2.3) подсчитывают эмпирическую статистическую вероятность попадания значений случайной величины в этот интервал P_i и среднее для интервала значение плотности распределения $\bar{f}_i = \dfrac{P_i}{\Delta x}$.

7. На координатной плоскости X–0–$f(x)$ на оси абсцисс откладывают границы элементарных интервалов $x_i^{\text{лев}}$ и $x_i^{\text{пр}}$ и на каждом из построенных таким образом интервалов откладывают столбец высотой $\bar{f}_i$. Полученную столбчатую диаграмму называют «гистограмма распределения частот».

8. Если через вершины столбиков (преимущественно через середины высот) провести плавную кривую таким образом, чтобы в пре-

делах каждого элементарного интервала площадь столбика равнялась бы площади криволинейной трапеции, расположенной под кривой (см. рис. 2.4), то будет построен эмпирический график плотности распределения для непрерывной случайной величины X.

Пример графика плотности распределения, построенного по приведенному алгоритму, показан на рис. 2.5.

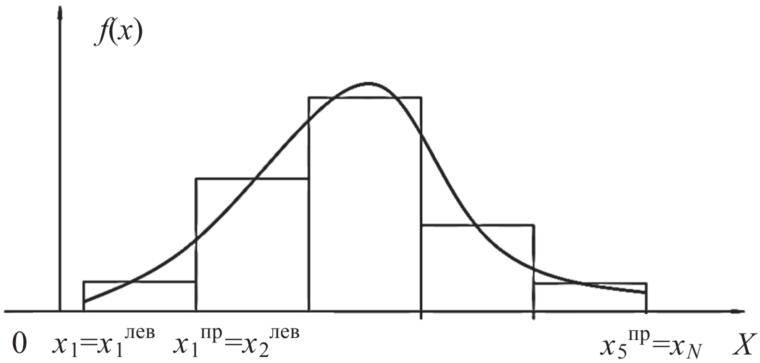


Рис. 2.5. Эмпирическая гистограмма распределения частот и эмпирический график плотности распределения

Важное значение при построении эмпирического графика плотности распределения имеет удачный выбор количества k интервалов разбиения всего размаха варьирования опытных данных на элементарные интервалы Δx (используется в п. 3 вышеприведенного алгоритма). В литературе встречается большое количество формул и методов определения значения k. Например, достаточно часто рекомендуют использовать следующие формулы [12]:

- формула Стерджеса $k = 1 + \log_2 N = 1 + 3{,}31 \ln N$;
- формула Брукса и Коррузера $k = 5\ln N$;
- формула Хаинхольда и Гаеде $k = \sqrt{N}$.

Такие и ряд других выражений и методов вполне применимы при построении эмпирического графика плотности распределения, но, строго говоря, они предназначены для оптимальной разбивки опытных данных на интервалы при использовании ряда критериев согласия типа χ^2 в целях повышения мощности этих критериев (подробнее см. п. 4.4.1). Для упрощения процедуры выбора k можно рекомендовать и следующее простое правило: k следует выбирать максимальным, но таким, чтобы в каждый интервал разбиения попадало бы не менее

$k_{min} = 3...7$ опытных значений, при этом величина k_{min} выбирается в зависимости от количества имеющихся опытных значений N: при $N = 10...20$ $k_{min} = 3$, а при $N > 300...400$ $k_{min} = 7$.

Следует отметить, что в литературе, например в [11], приводятся и другие алгоритмы, и методы построения эмпирических графиков функции распределения и плотности распределения.

2.4. Теоретические законы распределения случайной величины

Для любой случайной величины, используя опытные данные, например алгоритмы, приведенные в подглавах 2.2 и 2.3, можно построить опытные (эмпирические) графики функции и плотности распределения. Если для разных случайных величин, получаемых в разных экспериментах, строить такие графики, то можно будет заметить, что ряд получаемых кривых подобны и могут быть описаны с использованием уравнений одного и того же типа, которые будут отличаться лишь значениями числовых коэффициентов. Если произвести такое обобщенное описание, то полученные уравнения в дальнейшем можно будет использовать в качестве функций, описывающих определенный класс, вид, тип случайных величин, т. е. их можно использовать в качестве теоретических законов распределения. Это так называемый «эмпирический» или «аппроксимационный» способ получения теоретических законов распределения.

Другим подходом к получению теоретических законов распределений является использование известных положений теории вероятностей совместно с некоторыми гипотезами, допущениями, обобщениями, характеризующими какие-то особенности, специфические свойства случайной величины. Это так называемый «теоретический способ» получения теоретических законов распределения.

Однако и при «теоретическом способе» обычно гипотезы, допущения, обобщения и т. п., положенные в основу теоретического распределения, имеют конкретный практический смысл и наблюдаются (или могут наблюдаться) на практике. Поэтому с точки зрения результата оба этих способа получения теоретических распределений или близки, или почти равнозначны.

В настоящее время известно (описано) большое количество теоретических распределений, но далеко не все из них широко используются в общей инженерной практике. Далее рассмотрим наиболее часто используемые распределения именно в металлургической практике в рамках типовых задач обработки металлов давлением.

2.4.1. Равномерное распределение

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **равномерное распределение** (прямоугольное распределение) (uniform distribution; rectangular distribution): а) распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятности которой постоянна на конечном интервале $[a, b]$ и равна нулю вне его; б) распределение вероятностей дискретной случайной величины такое, что $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ для $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ [5].

Используя такое определение, а также общематематические приемы и знание свойств этих функций, нетрудно получить общий вид уравнений как для плотности распределения (2.5), так и для функций распределения (2.1):

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x < b, \\ 1 \text{ при } x \ge b; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a < x < b, \\ 0 \text{ при } x \ge b. \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения для равномерно распределенной случайной величины X показаны на рис. 2.6.

Равномерное распределение используется на практике для описания случайных величин, имеющих равную вероятность наблюдения на некотором диапазоне значений (от a до b). Например, погрешность измерений, производимых одним и тем же средством измерения, подчиняется равномерному распределению.

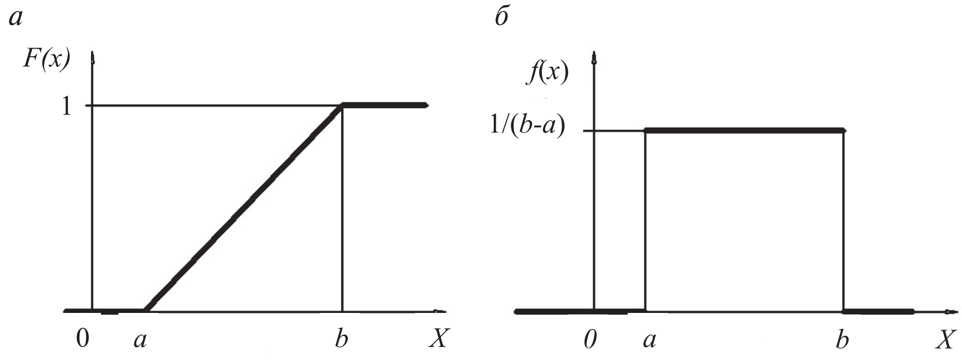


Рис. 2.6. Графики функции распределения (*а*) и плотности распределения (*б*) для равномерно распределенной случайной величины *X*

Вид равномерного распределения (вид графиков функции и плотности распределения, показанных на рис. 2.6) целиком и полностью зависит от числовых значений величин *a* и *b*. По сути, именно различие в числовых значениях величин *a* и *b* и отличает одну равномерно распределенную случайную величину от другой.

Аналогичные числовые величины, конкретизирующие теоретические законы распределений для конкретного случая, для конкретной случайной величины, используются также в других теоретических и эмпирических распределениях и имеют специальное название — параметры (распределения).

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **параметр (**parameter) — величина, используемая в описании распределения вероятностей некоторой случайной величины.

2.4.2. Нормальное распределение

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **нормальное распределение** (распределение Лапласа — Гаусса) (normal distribution; Laplace — Gauss distribution) — распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X* такое, что плотность распределения вероятностей при $-\infty < x < +\infty$ принимает действительное значение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.13)$$

где μ и σ — параметры нормального распределения (μ — математическое ожидание, σ — стандартное отклонение).

Функция распределения для нормального закона распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad (2.14)$$

где μ и σ — те же параметры распределения, что и в выражении (2.13).

Графики плотности распределения и функции распределения для нормально распределенных случайных величин при различных числовых значениях параметра распределения σ приведены на рис. 2.7 и 2.8 соответственно.

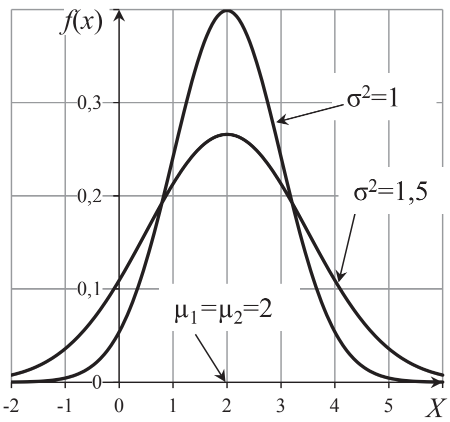


Рис. 2.7. Графики плотности распределения нормально распределенных случайных величин *X*

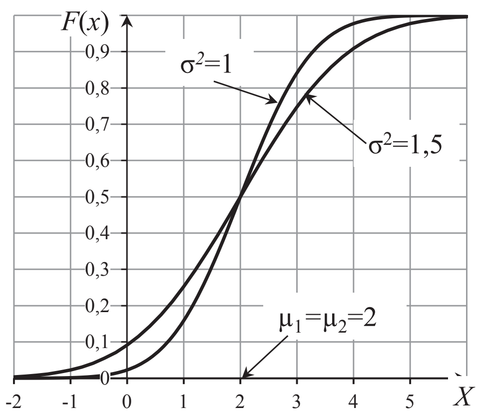


Рис. 2.8. Графики функции распределения нормально распределенных случайных величин *X*

Суть и смысл величин μ и σ будут подробно рассмотрены в подглаве 2.5. Сейчас же только отметим, что величина математического ожидания μ является характеристикой центра распределения случайной величины, тем расчетным числовым значением, относительно которой наблюдается разброс опытных значений. Стандартное отклонение σ является характеристикой, мерой разброса, рассеяния опытных значений. Чем больше числовое значение σ, тем больше разброс опытных значений относительно центра распределения — величины μ.

Теоретической основой нормального закона распределения является центральная предельная теорема Ляпунова, согласно которой сумма большого количества независимых случайных величин, каждая из которых мало и примерно одинаково влияет на значение суммы, будет подчиняться закону нормального распределения. Например, сумма из n независимых случайных величин подчиняется нормальному закону распределения уже при $n \geqslant 5$.

В теории вероятностей и математической статистике нормальный закон распределения имеет важнейшую роль, причем как для чисто теоретических построений, так и для практического использования. Значимость нормального закона распределения связана с тем, что это распределение служит хорошим приближением для очень широкого спектра случайных величин, получаемых во многих экспериментах. Значимость определяется следующими основными причинами:

- исходные положения, явившиеся предпосылками теоретического формирования нормального закона распределения, соответствуют многим реальным физическим процессам, наблюдаемым при проведении широкого спектра экспериментов. В принятых нами терминах эти исходные положения можно сформулировать так:
  - — на значение случайной величины влияет бесконечно большое количество слабо влияющих, неуправляемых и неконтролируемых факторов (факторов группы δ_i, подробно описанных в главе 1);
  - — влияние каждого из таких неуправляемых и неконтролируемых факторов δ_i пренебрежимо мало и примерно одинаково;
- для большого количества распределений другого вида нормальное распределение является предельным при возрастании объема выборки и поэтому может быть использовано для их аппроксимации;
- нормальное распределение обладает рядом удобных математико-статистических свойств: легко нормируется и аппроксимируется, обладает свойством аддитивности и т. п.

Некоторым недостатком нормального распределения является то, что взять интеграл (2.14) в конечных разностях невозможно, поэтому для расчета значения функции распределения (2.14) используют один из двух приемов:

- операцию нормирования и таблицы стандартизованного нормального закона распределения;
- операцию нормирования и специальные приближенные функции, аппроксимирующие стандартизованный нормальный закон

распределения. Известно достаточно большое количество таких аппроксимирующих функций, обладающих достаточно высокой точностью.

2.4.3. Операция нормирования. Стандартизованное нормальное распределение

В значительном количестве случаев практической деятельности удобно разновеликие характеристики одной природы для сравнения или других целей приводить к некоторой однотипной, нормированной, стандартизованной величине. Это позволяет выявлять и использовать общие закономерности, приемы, принципы, методы и тому подобное для разновеликих величин в общем, как правило, безразмерном и удобном для практики виде. Нормирование и стандартизация — довольно широко используемые на практике приемы. В теории вероятностей и математической статистике также используют эти приемы для осуществления приведения, стандартизации различных распределений к общему виду. При этом под терминами «стандартизация» и «нормирование» понимают одну и ту же однозначно определенную математическую операцию.

Операцией нормирования (нормированием, операцией стандартизации, стандартизацией) случайной величины называют преобразование координат, состоящее из операций центрирования и масштабирования значений этой случайной величины.

Операция центрирования случайной величины состоит в переносе центра распределения случайной величины в нулевую точку центрированной системы координат. Центрирование производится за счет вычитания из значений случайной величины координаты центра ее распределения μ (математического ожидания):

$$X_{\text{ц}} = X - \mu, \qquad (2.15)$$

где $X_{\text{ц}}$ — центрированная случайная величина; X — центрируемая случайная величина.

В результате центрирования математическое ожидание μ центрированной случайной величины становится равным нулю, таким образом, все поле рассеяния опытных значений случайной величины переносится в центральную точку системы координат.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **центрированная случайная величина** (centred random variable) — случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю.

Операция масштабирования случайной величины состоит в стандартизации общего разброса числовых значений этой случайной величины. Масштабирование осуществляется за счет деления значений случайной величины на характеристику разброса σ (стандартное отклонение):

$$X_M = \frac{X}{\sigma}, \tag{2.16}$$

где X_M — масштабированная случайная величина; X — масштабируемая случайная величина.

Масштабированная таким образом случайная величина всегда имеет стандартное отклонение σ равное 1.

Объединив операции центрирования (2.15) и масштабирования (2.16), получим выражение для проведения операции нормирования

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{2.17}$$

где U — нормированная случайная величина; X — нормируемая случайная величина.

Операцию нормирования также называют операцией стандартизации, а случайную величину, полученную в результате применения такой операции, также называют стандартизованной случайной величиной.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **стандартизованная случайная величина** (standardized random variable) — случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю, а стандартное отклонение — единице.

Если операции нормирования (стандартизации) подвергнуть нормально распределенную случайную величину X (рассмотренную в п. 2.4.2), то получим случайную величину U, которая будет подчиняться стандартизованному нормальному закону распределения.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **стандартное нормальное распределение** (стандартное распределение Лапласа — Гаусса) (standardized normal distribution; standardized Laplace — Gauss distribution) — распределение вероятностей стандартизованной нормальной случайной величины U, плотность распределения которой

$$\varphi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2}} \tag{2.18}$$

при $-\infty < U < +\infty$. Если случайная величина X имеет математическое ожидание μ и стандартное отклонение σ, то соответствующая стандартизованная случайная величина $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

График плотности распределения вероятностей стандартизованной нормально распределенной случайной величины U показан на рис. 2.9.

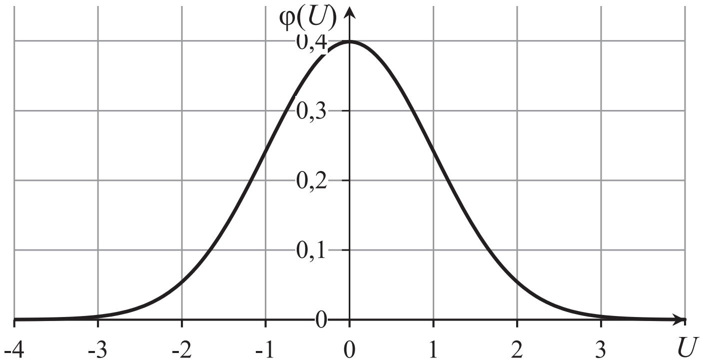


Рис. 2.9. График плотности распределения вероятностей стандартизованной нормально распределенной случайной величины U

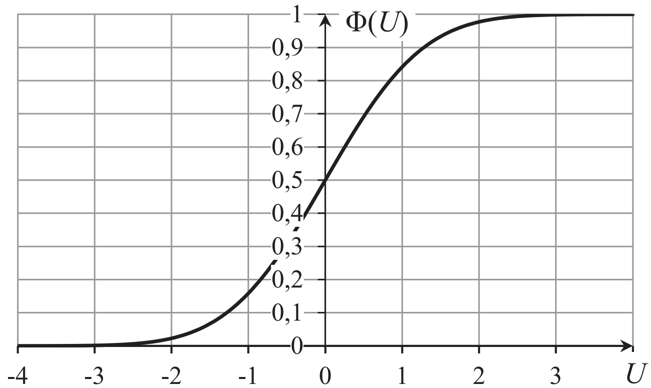


Рис. 2.10. График функции распределения стандартизованной нормально распределенной случайной величины U

В литературе стандартное нормальное распределение довольно часто называют нормированным нормальным распределением (за счет использования термина «нормирование» вместо термина «стандартизация», следующего из ГОСТ Р 50779.10–2000).

Функция распределения для стандартного нормального закона распределения имеет вид

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{U} e^{-\frac{U^2}{2}} dU. \qquad (2.19)$$

Кроме указанного пути получения стандартного нормального закона распределения (2.18) и (2.19) из нормального закона распределения (2.13) и (2.14) за счет применения операции нормирования (стандартизации), возможен и другой путь. Если в уравнениях (2.13) и (2.14) принять параметры распределения $\mu = 0$ (математическое ожидание) и $\sigma = 1$ (стандартное отклонение), что следует из приведенного выше определения, то мы также получим выражения (2.18) и (2.19). Таким образом, стандартный нормальный закон распределения (2.18) и (2.19) является частным случаем общего нормального закона распределения (2.13) и (2.14) при условии, что параметры распределения примут значения $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Важной особенностью стандартного нормального закона распределения является то, что любая случайная величина X, подчиненная своему варианту нормального закона распределения, со своими значениями параметров μ и σ, при использовании операции стандартизации (нормирования) может быть приведена к одному и тому же виду — стандартизованной нормально распределенной величине U. Такое приведение чрезвычайно удобно с практической точки зрения: если, например, один раз сформировать таблицу значений функции распределения $\Phi(U)$ для стандартного нормального закона путем расчета интеграла (2.19) при разных U, то потом, используя простую операцию стандартизации (2.17), можно с помощью этой таблицы подсчитывать значения функции распределения (2.19) для любых X, с любыми μ и σ. И нет необходимости каждый раз рассчитывать значение интеграла (2.14). Такая таблица значений функции распределения $\Phi(U)$ для стандартизованной нормально распределенной величины U приводится в различных учебниках и математических справочниках. Приведена она и в прил. 1 данного учебного пособия.

Определенным недостатком стандартного нормального закона является то, что интеграл (2.19) нельзя взять в конечных разностях. Поэтому для его расчета приходится прибегать или к использованию таблиц, или к разложению экспоненциальной функции в степенной ряд с последующим его почленным интегрированием, что долго и неудобно. Таблицу значений функции распределения $\Phi(U)$ использовать также не всегда удобно (например, при программировании). В таких случаях более простым решением является аппроксимация (замена) интегрального выражения (2.19) более простым для расчета приближенным уравнением, не содержащим интеграла.

Ниже приведены лишь некоторые из известных аппроксимаций стандартного нормального распределения [12] и погрешности, возникающие при замене точного выражения (2.19) на указанное приближенное:

- аппроксимация 1

$$\Phi(U)=1-(\sqrt{2\pi}e^{U^2/2})^{-1}\sum_{i=1}^{3}a_i\lambda^i,$$

где $\lambda=\left(1+0,33267U\right)^{-1}$; $a_1=0,4361836$; $a_2=-0,1201676$; $a_3=0,937298$.

Абсолютная погрешность не более $1\cdot10^{-5}$;

- аппроксимация 2

$$\Phi(U)=1-(\sqrt{2\pi}e^{U^2/2})^{-1}\sum_{i=1}^{5}a_i\lambda^i,$$

где $\lambda=\left(1+0,2316419U\right)^{-1}$; $a_1 = 0,31938153$; $a_2 = -0,35656378$; $a_3=1,7814779$; $a_4=-1,821256$; $a_5=1,3302744$.

Абсолютная погрешность не более $1\cdot10^{-7}$;

- аппроксимация 3

$$\Phi(U)=1-\left(1+10^{-6}U\left(c_6+U\left(c_5+U\left(c_4+U\left(c_3+U\left(c_2+Uc_1\right)\right)\right)\right)\right)\right)^{-16},$$

где $c_1=5,383$; $c_2=48,891$; $c_3=38,004$; $c_4=3277,626$; $c_5=21141,006$; $c_6=49867,347$.

Абсолютная погрешность не более $5\cdot10^{-7}$;

- аппроксимация 4

$$\Phi(U)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i u^{2i+1}}{2^i i!(2i+1)}.$$

Относительная погрешность не более 0,3%;

- аппроксимация 5

$$\Phi(U)=\left\{1-\exp\left(\frac{2U^2}{\pi}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},\ 0<U\le 1{,}96;\ 0<\Phi(U)\le 0{,}95.$$

Абсолютная погрешность не более 0,114;

- аппроксимация 6

$$\Phi(U)=\left\{1-\left(1+kU^2\right)^{-1}\cdot\exp\left[\left(\frac{2}{\pi}-k\right)\left(-U^2\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\ 0<U\le 5{,}397,$$

$$0<\Phi(U)\le 1\text{-}1\cdot 10^{-7},$$

где $k=0{,}1253$.

Относительная погрешность не более 1 %;

- аппроксимация 7

$$\Phi(U)=1-\frac{1}{2}\left(1+a_1\frac{U}{\sqrt{2}}+a_2\frac{U^2}{2}+a_3\frac{U^3}{2\sqrt{2}}+a_4\frac{U^4}{4}\right)^{-16}, \qquad (2.20)$$

где $a_1 = 0{,}278393$; $a_2 = 0{,}230389$; $a_3 = 0{,}0000972$; $a_4 = 0{,}078108$;

- аппроксимация 8

$$\Phi(U)=1-0{,}852\cdot\exp\left(-\left(\frac{U+1{,}5774}{2{,}0637}\right)\right)^{2{,}34},\ U>0 \qquad (2.21)$$

при $U<0$ $F(-U) = 1 - F(U)$.

Абсолютная погрешность формул (2.20) и (2.21) не более 0,0002.

При использовании компьютера определение значения функции распределения для стандартного нормального распределения достаточно удобно производить с помощью широко распространенных электронных таблиц **Excel**. Путей такого определения несколько. Вот один из них, приведенный для релиза Excel 2007. В главном меню Excel (рис. 2.11) выбрать вкладку Формулы. На вкладке Формулы последовательно выбрать Вставить функцию → Статистические → НОРМСТРАСП.

В открывшемся окне Аргументы функции НОРМСТРАСП (рис. 2.12) в поле Z ввести числовое значение стандартизованной (нормированной) случайной величины U, для которого необходимо определить значение функции распределения (например, значение 0,83, полученное в результате использования операции стандартизации (2.16) для нормально распределенной случайной величины *X*).

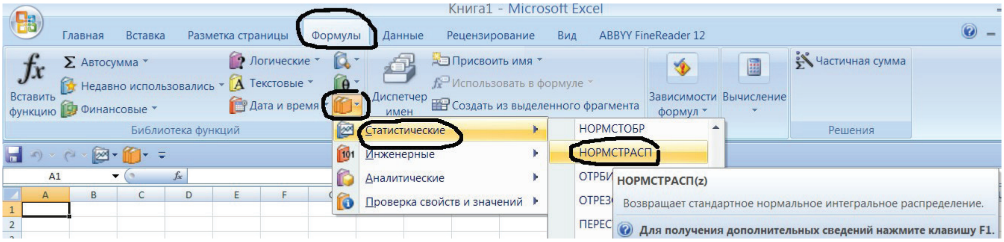


Рис. 2.11. Главное меню Excel

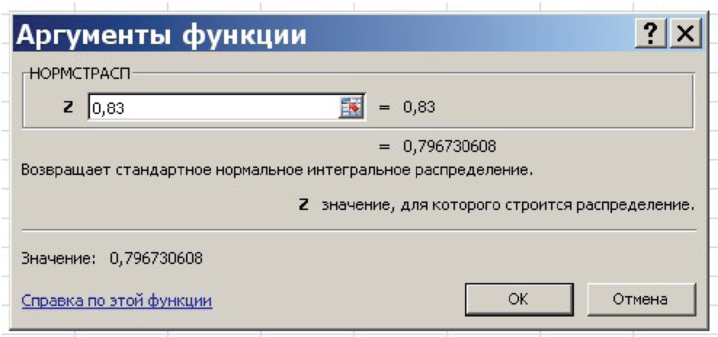


Рис. 2.12. Окно Аргументы функции

2.4.4. Экспоненциальное распределение

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **экспоненциальным распределением** (exponential distribution) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которая может принимать любые значения от 0 до $+\infty$ и плотность распределения которой

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \tag{2.22}$$

при $x \geqslant 0$ и параметре $\lambda = \dfrac{1}{b}$, где b — параметр масштаба.

Функция экспоненциального распределения имеет вид

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{2.23}$$

Графики плотности распределения и функции распределения для экспоненциально распределенных случайных величин X при различных числовых значениях параметров распределения λ показаны на рис. 2.13, *а* и 2.13, *б* соответственно.

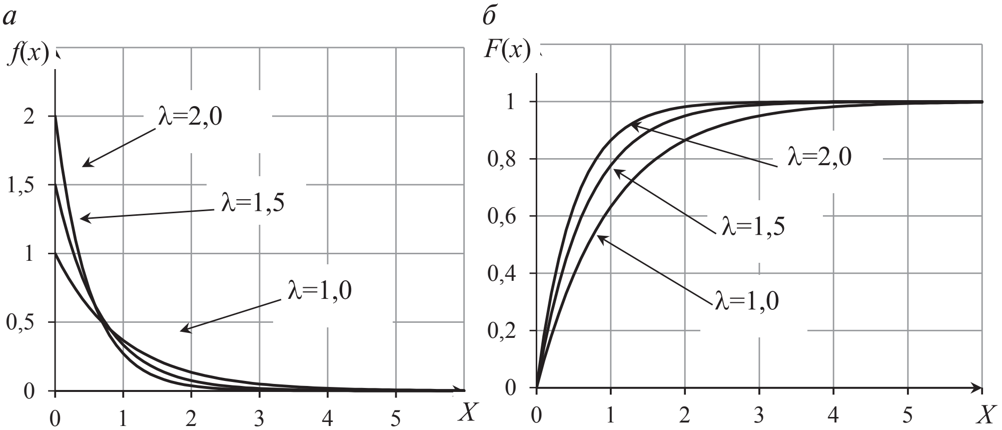


Рис. 2.13. Графики плотности (*а*) и функции (*б*) экспоненциально распределенных случайных величин

Экспоненциальное распределение вероятностей можно обобщить подстановкой $x - a$ вместо x при $x \geqslant a$.

Экспоненциальное распределение вероятностей является одним из наиболее часто применяемых распределений в теории надежности и теории массового обслуживания. Используется для описания:

- внезапных отказов, когда износом деталей можно пренебречь;
- наработки на отказ для невосстанавливаемых деталей;
- наработки между соседними отказами у восстанавливаемых деталей;
- наработки на отказ у технической системы, состоящей из многих компонентов, причем вне зависимости от распределения наработки на отказ у элементов системы.

2.4.5. Распределение Вейбулла

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **распределение Вейбулла** (распределение экстремальных значений типа III) (Weibull distribution) — распределение вероятностей непрерывной случайной величины X с функцией распределения

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right),$$

где $x \geqslant 0$, а параметры $a > 0$ и $b > 0$.

Плотность распределения Вейбулла описывается выражением

$$f(x) = \frac{b}{a^b} x^{b-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right).$$

Графики функции распределения и плотности распределения для случайных величин, имеющих распределение Вейбулла при различных числовых значениях параметров распределения b и фиксированном значении параметра $k = 2$ и величины смещения $a = 0$, показаны на рис. 2.14, *а* и 2.14, *б* соответственно.

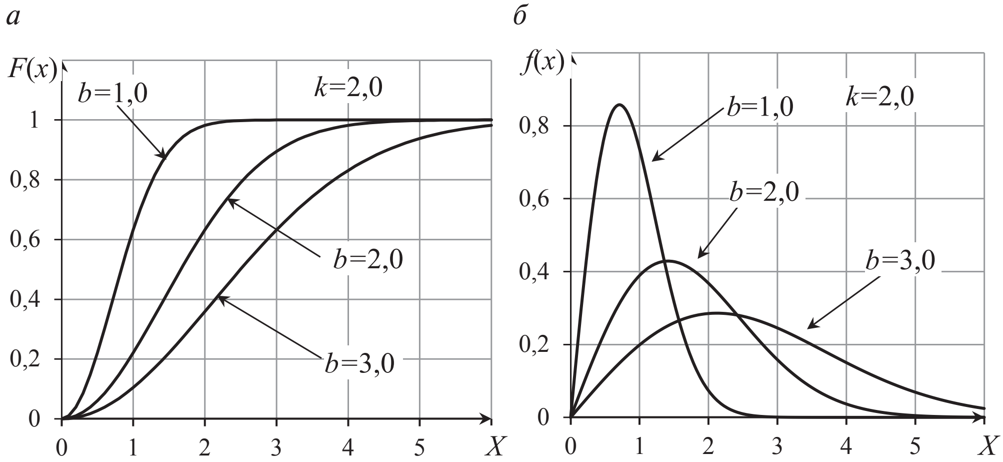


Рис. 2.14. Графики функции (*а*) и плотности (*б*) распределения Вейбулла

Распределение Вейбулла широко используется в радиоэлектронике, т. к. хорошо описывает наработку на отказ многих электроприборов и радиокомпонентов (электронные лампы, полупроводниковые приборы, ряд приборов СВЧ). Частным случаем распределения Вейбулла является рассмотренное выше экспоненциальное распределение (при $k = 1$). При $k = 2$ распределение Вейбулла преобразуется в распределение Релея.

2.4.6. Распределение Пирсона (χ^2-распределение)

Если U_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, то сумма квадратов этих величин $\chi^2(\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} U_i^2$ подчиняется распределению Пирсона (χ^2-распределению) с числом степеней свободы ν.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **χ^2-распределение** (распределение Пирсона) (chi-squared distribution, χ^2-distribution) — распределение вероятностей непрерывной случайной величины, принимающей значения от 0 до $+\infty$, плотность распределения вероятностей которой

$$f\left(\chi^2, \nu\right) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right),$$

где $\chi^2 > 0$ при значении параметра $\nu = 1, 2, ...$; ν — параметр распределения; $\Gamma(\nu/2)$ — гамма-функция:

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \exp(-x)\, dx. \tag{2.24}$$

Функция распределения χ^2 определяется выражением

$$F\left(\chi^2, \nu\right) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} y^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{y}{2}\right) dy. \tag{2.25}$$

Графики функции распределения и плотности распределения случайной величины χ^2, подчиняющейся распределению Пирсона для различных чисел степеней свободы ν, показаны на рис. 2.15, *а* и 2.15, *б* соответственно.

Распределение Пирсона очень широко применяется и в анализе нормально распределенных случайных величин, и в непараметрической статистике как предельное распределение. Однако расчет интегрального выражения (2.25) весьма непрост. Поэтому на практике для определения функции распределения Пирсона используют либо приближенные аппроксимирующие выражения (которых известно несколько, но и они не очень просты для расчетов), либо статистические таблицы, приведенные во многих учебниках и справочниках, например в прил. 2.

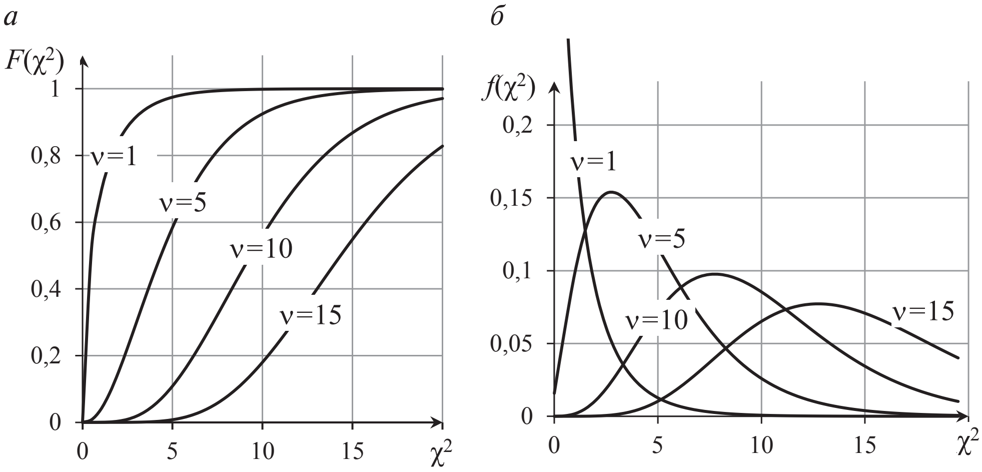


Рис. 2.15. Графики функции (*а*) и плотности (*б*) распределения Пирсона

Определить значения функции χ^2-распределения можно также с помощью Excel. Для примера используем другой путь выбора функций Excel по сравнению с рассмотренным выше, в п. 2.4.3, хотя можно использовать и описанный там путь.

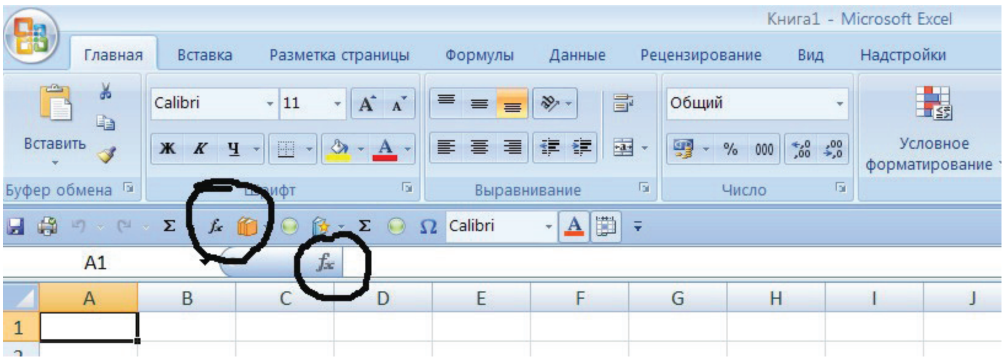


Рис. 2.16. Команда Вставить функцию

В главном окне Excel, в строке формул выбрать кнопку Вставить функцию (эта же кнопка может быть вынесена и на панель быстрого доступа, рис. 2.16).

В открывшемся окне Мастер функций — шаг 1 из 2 (рис. 2.17) в меню Категории выбрать Статистические, далее из появившегося списка функций Выберете функцию выбрать ХИ2РАСП, нажать ОК.

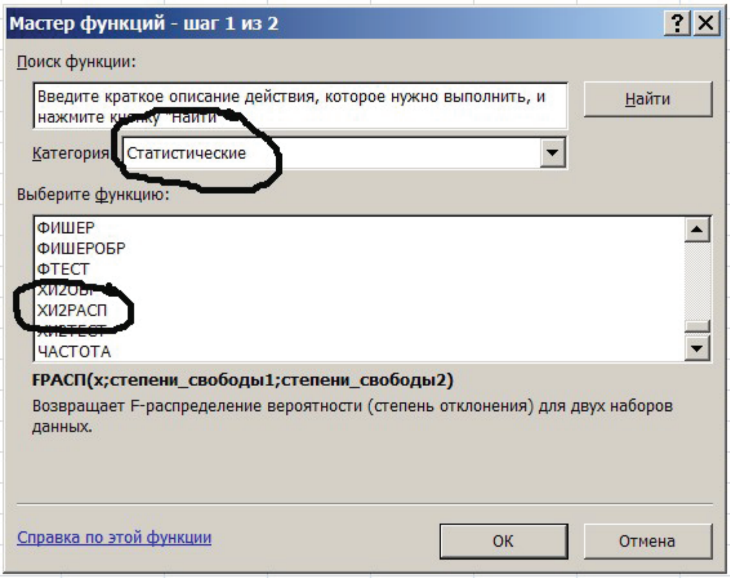


Рис. 2.17. Выбор функции распределения с помощью «Мастера функций»

В появившемся окне Аргументы функции ХИ2РАСП в строке X ввести необходимое значение величины аргумента χ^2, а в строке Степени_свободы — необходимое число степеней свободы ν (рис. 2.18). Нажать ОК.

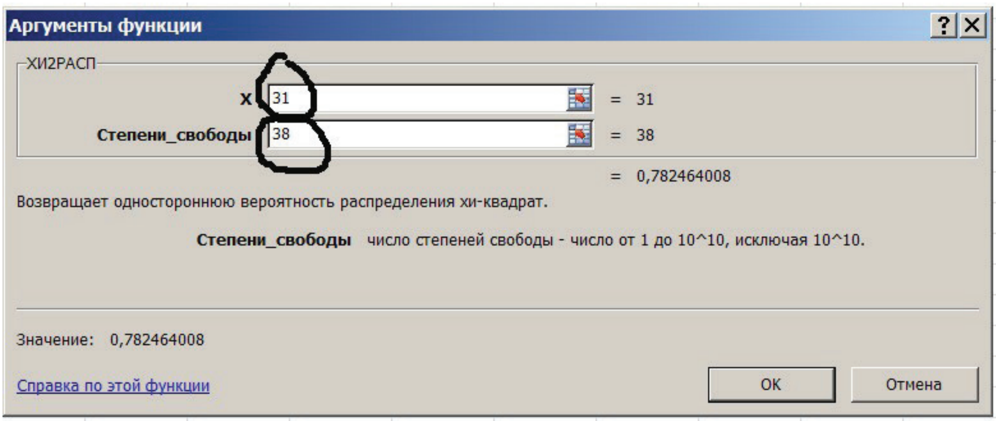


Рис. 2.18. Задание значений аргументов функции

Результат расчета будет помещен в текущую ячейку текущего листа Excel.

2.4.7. Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

Если U — стандартная нормально распределенная случайная величина, χ_ν^2 — случайная величина, имеющая распределение Пирсона с ν числом степеней свободы, причем U и χ_ν^2 независимы, то величина $t_\nu = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$ будет подчиняться *t*-распределению (распределению Стьюдента) с числом степеней свободы ν.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 ***t*-распределение** (распределение Стьюдента) (*t*-distribution; Student's distribution) — распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятностей которой

$$f(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \tag{2.26}$$

где $-\infty < t < +\infty$ с параметром $\nu = 1, 2, \ldots$; $\Gamma(\nu/2)$ — гамма-функция (2.24).

Функция *t*-распределения определяется выражением F

$$F(t,\ \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^{t} \left(1+\frac{y^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} dy.$$

Графики функции распределения и плотности распределения Стьюдента для разных степеней свободы ν показаны на рис. 2.19.

Особенностью распределения Стьюдента является то, что при увеличении числа степеней свободы (параметр распределения ν) распределение приближается к стандартному нормальному закону распределения (см. п. 2.4.2). При $\nu \to \infty$ распределения совпадают. Стандартное нормальное распределение является предельным или асимптотическим распределением для *t*-распределения. На практике считается, что уже при $\nu > 30$ расхождение между функциями этих распределений становится малозначимым (в ряде книг используют ограничения $\nu > 60$ или $\nu > 120$, что определяется разной принятой точностью округления).

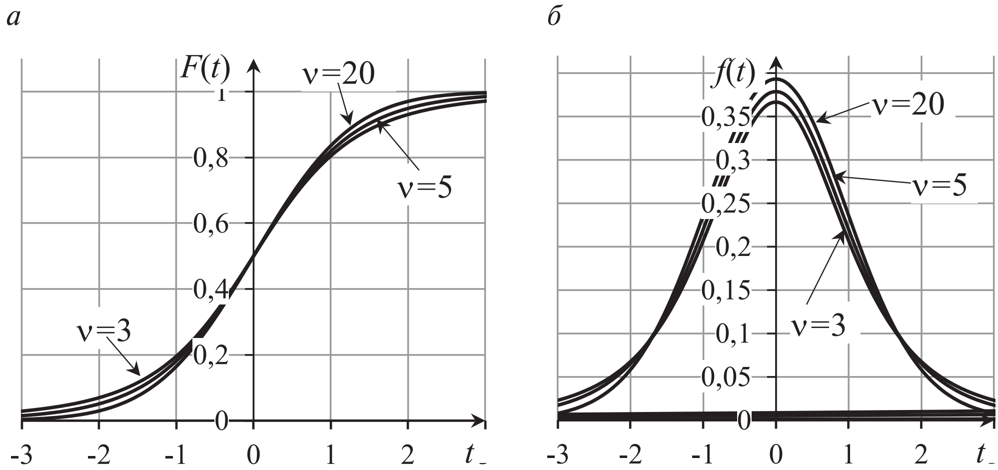


Рис. 2.19. Графики функции (*а*) и плотности (*б*) распределения Стьюдента

Поскольку достаточно широко применяется *t*-распределение в практике статистической обработки опытных данных, в литературе широко распространены таблицы значений функции распределения. Приведена такая таблица и в прил. 3.

Определить значения функции *t*-распределения можно также и с помощью Excel. Достаточно удобным способом доступа к функциям Excel (в том числе и статистическим) является использование кнопки Другие функции, которая может быть вынесена и на панель быстрого доступа в процессе настройки интерфейса Excel (рис. 2.20).

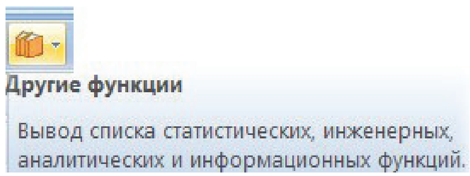


Рис. 2.20. Доступ к функциям Excel с помощью кнопки Другие функции

После нажатия кнопки Другие функции последовательно выбираем кнопки Статистические → СТЬЮДРАСП (рис. 2.21).

Наряду с таким путем доступа к функции СТЬЮДРАСП, могут быть использованы и вышеописанные пути доступа к статистическим функциям.

В появившемся окне «Аргументы функции СТЬЮДРАСП» в строке «X» (рис. 2.22) ввести необходимое значение величины аргумента *t*, а в строке «Степени_свободы» — необходимое число степеней свободы ν. В строке «Хвосты» для выявления значения так называемого «двухстороннего» распределения Стьюдента необходимо вводить значение 1. Нажать ОК.

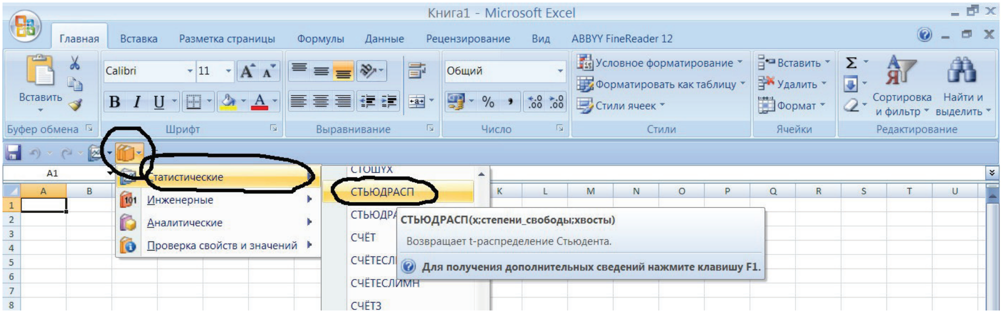


Рис. 2.21. Выбор команды СТЬЮДРАСП (распределение Стьюдента) через меню кнопки Другие функции

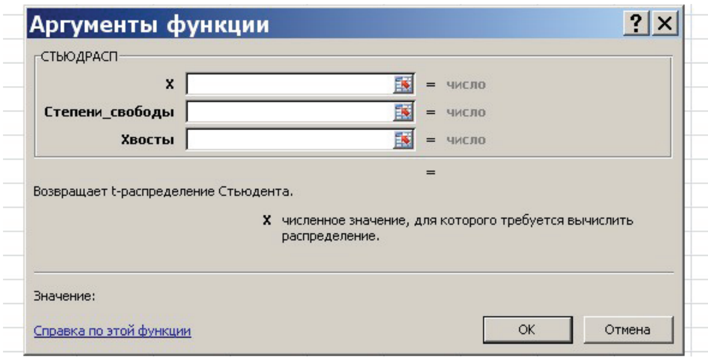


Рис. 2.22. Окно «Аргументы функции СТЬЮДРАСП»

2.4.8. Распределение Фишера (*F*-распределение)

Если $\chi^2_{\nu_1}$ и $\chi^2_{\nu_2}$ — две независимые случайные величины, подчиненные χ^2-распределению (распределение Пирсона) с числами степеней свободы ν_1 и ν_2, соответственно, то величина $F_{\nu_1,\nu_2} = \dfrac{\chi^2_{\nu_1} / \nu_1}{\chi^2_{\nu_2} / \nu_2}$ подчиняется F-распределению (распределению Фишера) с ν_1 и ν_2 числами степеней свободы.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 ***F*-распределение** (*F*-distribution) — распределение вероятностей непрерывной случайной величины, принимающей значения от 0 до $+\infty$, плотность распределения вероятностей которой

$$\varphi(F, \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 F + \nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}},$$

где $F \geqslant 0$ с параметрами $\nu_1 = 1, 2, \ldots$ и $\nu_2 = 1, 2, \ldots$; $\Gamma(\nu/2)$ — гамма-функция.

Функция *F*-распределения определяется выражением

$$\varphi(F, \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \int_0^F y^{\frac{\nu_1}{2}-1} (\nu_1 + \nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \, dy.$$

Для распределения Фишера есть некоторые частные случаи:

- при $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = \infty$ или $\nu_2 = 0$ и $\nu_1 = \infty$ *F*-распределение преобразуется к нормальному закону распределения, т. е. нормальный закон распределения является предельным законом для *F*-распределения;
- при $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 1$ *F*-распределение совпадает с распределением квадрата случайной величины, подчиненной *t*-распределению Стьюдента;
- при $\nu_1 \to \infty$ или $\nu_2 \to \infty$ *F*-распределение преобразуется к χ^2-распределению с $\nu = \nu_1 = \nu_2$ числами степеней свободы.

Графики функции распределения и плотности распределения Фишера при фиксации одного из чисел степеней свободы (ν_1) и для разных степеней свободы ν_2 показаны на рис. 2.23.

F-распределение широко применяется для различных случаев сравнения дисперсий, коэффициентов множественной корреляции и других вариантов практической статистической обработки опытных данных, поэтому в литературе широко распространены таблицы значений функции *F*-распределения, часть из них приведена в прил. 4.

При частом использовании статистических функций на панель быстрого доступа можно вынести кнопку Статистические (рис. 2.24), напрямую вызывающую эти функции. При нажатии данной кнопки открывается группа функций Статистические, среди которых следует выбрать функцию FРАСП (рис. 2.25).

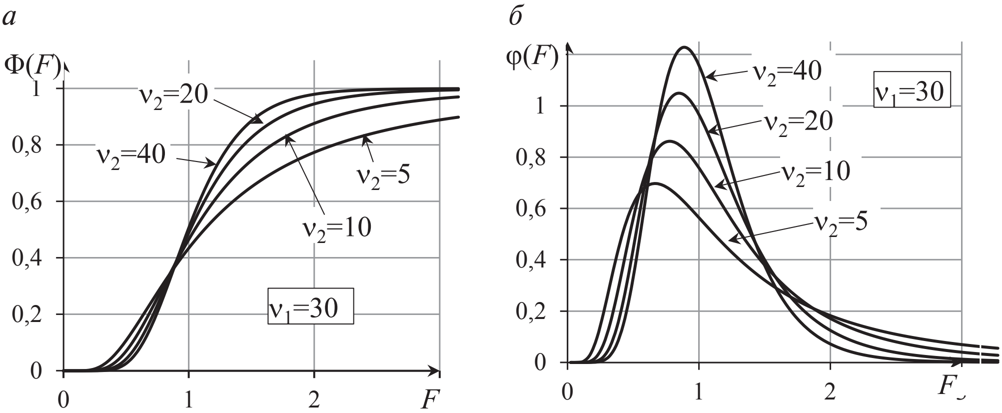


Рис. 2.23. Графики функции (*а*) и плотности (*б*) распределения Фишера

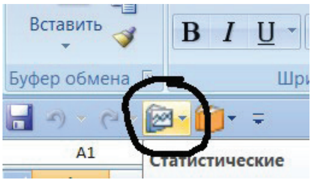


Рис. 2.24. Кнопка Статистические

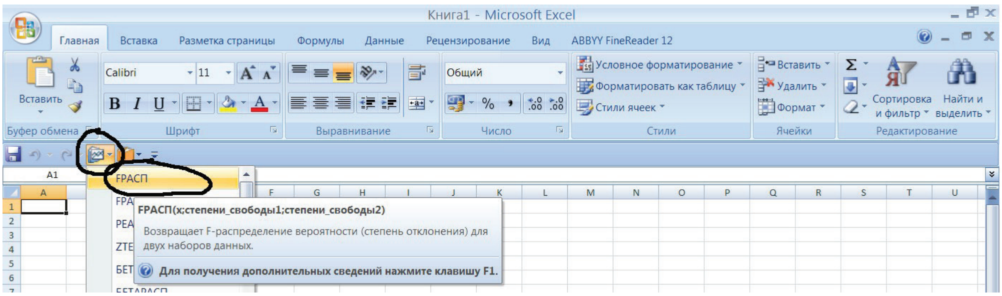


Рис. 2.25. Группа функций Статистические

В появившемся окне «Аргументы функции FРАСП» в строке «X» (рис. 2.26) ввести необходимое значение величины аргумента F, а в строках «Степени_свободы 1» и «Степени_свободы 2» — необходимые числа степеней свободы ν_1 и ν_2. Здесь важно иметь в виду, что в каждом конкретном случае использования F-распределения каждое число степеней свободы ν_1 и ν_2 имеет свой совершенно конкретный смысл и соответственно свое конкретное числовое значение. Путать и менять местами числовые значения ν_1 и ν_2 нельзя, т. к. при этом будем получать другое числовое значение функции распределения Фишера.

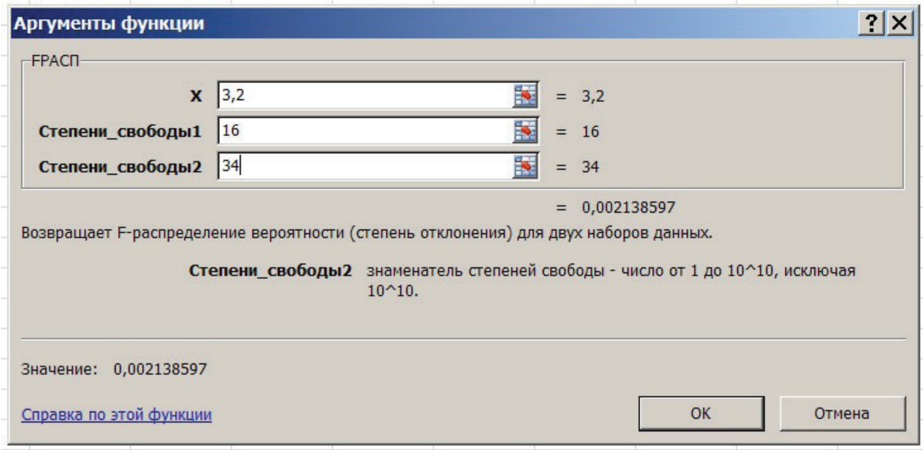


Рис. 2.26. Окно «Аргументы функции FРАСП»

Результат расчета будет помещен в текущую ячейку текущего листа Excel.

Рассмотренные в пп. 2.4.1—2.4.8 теоретические распределения далеко не полностью исчерпывают список известных теоретических распределений случайных величин. Рассмотрены лишь распределения, наиболее широко и часто используемые в инженерной практике металлургического производства. Полного списка известных на настоящее время теоретических распределений, видимо, нет.

Наиболее полный русскоязычный перечень таких распределений приведен в справочнике [12].

Перечень статистических функций распределения Excel в версии 2007, доступных для использования, приведен ниже:

- НОРМРАСП — нормальное;
- НОРМСТРАСП — стандартное нормальное;
- ХИ2 РАСП — Пирсона (χ^2-распределение);
- СТЬЮДРАСП — Стьюдента (t-распределение);
- FРАСП — Фишера (F-распределение);
- ЛОГНОРМРАСП — логарифмическое нормальное;
- ЭКСПРАСП — экспоненциальное;

- ВЕЙБУЛЛ — Вейбулла;
- БИНОМРАСП — биномиальное;
- ОТРБИНОМРАСП — отрицательное биномиальное;
- БЕТАРАСП — бета-распределение;
- ГАММАРАСП — гамма-распределение;
- ГИПЕРГЕОМЕТ — гипергеометрическое;
- ПУАССОН — Пуассона.

2.5. Квантили распределения

На практике достаточно часто возникает задача выбора или установления некоторого порогового значения для контролируемых величин, т. е. такого значения, которое или не должно быть превышено или ниже которого не должен опускаться контрольный показатель. Например, для предотвращения аварийной ситуации сила деформирования металла в любом процессе ОМД не должна оказаться выше силы, приводящей к разрушению деформирующего инструмента или деформирующей машины.

В условиях сугубо детерминированного теоретического подхода определение таких пороговых значений связано с проведением прочностных расчетов или каких-либо иных расчетов, определяемых теорией изучаемой предметной области. Однако на практике в условиях, когда наблюдаемые контролируемые величины и показатели являются случайными величинами, обойтись применением только лишь детерминированных подходов не удается. Приходится учитывать вероятностные свойства наблюдаемых случайных величин и факторов, влияющих на них.

Согласно определению по ГОСТ Р 50779.10–2000 **случайная величина** — переменная, которая может принимать любое значение из заданного множества значений и с которой связано распределение вероятностей, т. е. возникает задача установления числового порогового значения $X_{пр}$ для случайной величины X, которая в силу самого своего определения может принимать любое значение (для конкретизации под предельной величиной будем понимать верхний предел, так чтобы в допустимых условиях выполнялось неравенство $X \leqslant X_{пр}$).

Численное значение величины $X_{пр}$ принципиально можно получить одним из трех способов:

- определить из опыта;
- рассчитать, используя некоторую теоретическую детерминированную модель;
- рассчитать, используя некоторую вероятностную модель.

В значительном количестве случаев использовать опытный путь определения $X_{пр}$ или невозможно (например, в случаях аварийных ситуаций при достижении $X_{пр}$, приводящих к возникновению значительных рисков для жизни и здоровья), или достаточно дорого (при разрушении дорогостоящего оборудования). Поэтому значительно чаще используют второй путь и при этом поступают так:

- рассчитывают предельное теоретическое значение $X_{пр}^{Т}$, используя теоретическую сугубо детерминированную модель и теоретически предельные значения аргументов (факторов) этой модели;
- понимая, что на самом деле, в экспериментальных (в том числе и производственных) условиях, все величины, входящие в такую теоретическую модель в качестве аргументов (факторов), имеют некоторый разброс относительно использованных номинальных значений, применяют определенный дополнительный коэффициент запаса $k_{зап}$, предназначенный для учета возможных отрицательных воздействий максимальных колебаний использованных аргументов;
- для практического использования рассчитывают предельную, критическую, величину как отношение $X_{пр} = \dfrac{X_{пр}^{Т}}{k_{зап}}$ (т.е. при рассмотрении верхней границы значение $X_{пр}^{Т}$ понижают в $k_{зап}$ раз).

Понятно, что при таком способе получения предельного значения $X_{пр}$ в реальном процессе возможность возникновения аварийных ситуаций определяется прежде всего величиной принятого коэффициента запаса $k_{зап}$.

Существует проблема выбора некоторого оптимального значения данного коэффициента, т.к. использование большого значения $k_{зап}$ приводит, как правило, к удорожанию и низкой эффективности использования оборудования или технологических возможностей производства. А при малой величине $k_{зап}$ возрастает вероятность возникновения аварийных ситуаций. С точки зрения эффективности хотелось бы иметь минимальное значение $k_{зап}$, а с точки зрения безопасности и надежности — желательно использовать максимальное значение $k_{зап}$, что является постановкой типовой оптимизационной задачи с ограничениями. Решение данной задачи получают обычно так: принимают минимальное значение $k_{зап}$, но такое, которое гарантировало бы то, что превышение контролируемой величиной X значения $X_{пр}$ происходило бы достаточно редко и не на много. С привлечением понятия «вероятность», такое случайное превышение порогового значения означает, что вероятность превышения величиной X значения $X_{пр}$ является небольшой.

Обозначим величиной α вероятность того, что X превысит $X_{пр}$, т. е. что будет выполнено условие $X > X_{пр}$, а величиной p — вероятность того, что X окажется меньше или равным $X_{пр}$, т. е. что будет выполнено условие $X \le X_{пр}$. Назовем эти величины соответственно p — доверительная вероятность (или нижняя вероятность) и α — уровень значимости (или верхняя вероятность). Определения этих понятий рассмотрим позже. Величины p и α связаны соотношением $p + \alpha = 1$.

В теории и практике математической статистики предельные значения случайных величин, которые не будут превышены с определенной, чаще всего заданной, вероятностью p, используют чрезвычайно широко и часто называют «квантиль порядка p» и обозначают x_p.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **квантиль (случайной величины)** (quantile) — значение случайной величины x_p, для которого функция распределения принимает значение p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ или ее значение изменяется скачком от меньшего p до превышающего p.

Примечание из ГОСТ Р 50779.10–2000: если значение функции распределения равно p во всем интервале между двумя последовательными значениями случайной величины, то любое значение в этом интервале можно рассматривать как p-квантиль. Величина x_p будет p-квантилем, если $P_r(X < x_r) \leqslant p \leqslant P_r(X \leqslant x_r)$. Для непрерывной величины p-квантиль — это то значение переменной, ниже которого лежит p-я доля распределения.

Приведенное определение квантиля по ГОСТу является, несомненно, правильным, но несколько формальным, плохо отражающим тот практический смысл, который обычно вкладывают в термин «квантиль». В этом плане большей практической направленностью обладает следующее определение.

Квантиль случайной величины X порядка p — это значение случайной величины x_p, которое не будет превышено с вероятностью p.

Наряду с понятием квантиль, широко используются также следующие, связанные понятия.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **процентиль** — это квантиль, выраженный в процентах.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **медиана (**median) — это квантиль порядка $p = 0{,}5$.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **квартиль (**quartile) — квантиль порядка $p = 0{,}25$ или $p = 0{,}75$.

Функция распределения $F(x)$ представляет собой зависимость вероятности P непревышения случайной величиной X конкретного числового значения x от значения этой случайной величины x, а квантиль x_p отражает зависимость значения случайной величины X от вероятности p, т. е. функциональная зависимость квантиля x_p от вероятности p является обратной функцией по отношению к функции распределения $F(x)$. Именно представление о том, что квантиль — это обратная функция к функции распределения, и является основой для практического определения числовых значений квантиля.

Существует достаточно много способов практического определения числовых значений квантиля случайной величины, что связано с возможной различной структурой исходной информации для проведения расчетов и с наличием разных вариантов описания распределения. Ниже приведены некоторые из таких возможностей.

Определение квантиля с использованием опытных значений случайной величины

Исходная информация в этом случае должна представлять собой массив опытных значений x_i ($i = 1, 2, ..., N$) случайной величины X объемом N (количество опытных значений N).

Расчет квантиля x_p, отвечающего заданной вероятности p ее непревышения случайной величиной X можно провести в следующей последовательности:

- распределить опытные значения в вариационный ряд по возрастающей так, чтобы $x_1 \le x_2 \le ... \le x_N$, где N — количество опытных значений;

- для каждого опытного значения x_i рассчитать вероятность непревышения этого значения p_i, используя статистическое определение вероятности

$$p_i = P\left(X \le x_i\right) = \frac{n_i}{N},$$

где n_i — количество опытных значений, отвечающих условию $X \le x_i$ (включая само рассматриваемое значение x_i). Значение n_i совпадает с порядковым номером i рассматриваемого значения x_i в вариационном ряду, выстроенном по возрастающей: $n_i = i$;
- при совпадении заданной вероятности p с одним из рассчитанных значений эмпирической вероятности p_i значение случайной величины x_i, соответствующее этой вероятности p_i, и будет являться значением искомой квантили: $x_p = x_i$;
- при несовпадении заданной вероятности p ни с одним из рассчитанных значений эмпирической вероятности p_i выбираются два соседних опытных значения x_i и x_{i+1}, в диапазон соответствующих вероятностей p_i и p_{i+1} которых попадает заданное значение вероятности p ($p_i < p < p_{i+1}$). Используя две точки с координатами (x_i, p_i) и (x_{i+1}, p_{i+1}) и метод линейной интерполяции, рассчитываем искомое значение квантиля x_p, отвечающего заданной вероятности p.

Определение квантиля по графикам функции распределения

Приведем способ использования графика функции распределения (например, эмпирического графика, см. рис. 2.2, *а*) для определения вероятности непревышения некоторого числового значения x случайной величины X (рис. 2.27):

- отложить на оси абсцисс необходимое значение x;
- провести вертикаль до пересечения с кривой графика;
- провести горизонталь до пересечения с осью ординат;
- пересечение горизонтали с осью ординат даст искомое значение функции распределения $F(x)$.

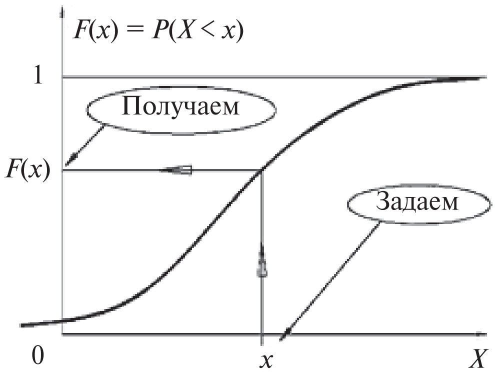


Рис. 2.27. Функция распределения $F(x)$ для определения вероятности непревышения некоторого числового значения случайной величины x

По определению, функция распределения равна вероятности p того, что случайная величина X не превысит конкретное числовое значение x: $F(x) = P\ (X \leq x)$. Поэтому, задав значение вероятности p, определение квантиля x_p по этому же графику можно произвести в обратном порядке (рис. 2.28):

- отложить на оси ординат необходимое значение p;
- провести горизонталь до пересечения с кривой графика $F(x)$;
- провести вертикаль до пересечения с осью абсцисс;
- пересечение вертикали с осью абсцисс даст искомое значение квантиля x_p порядка p.

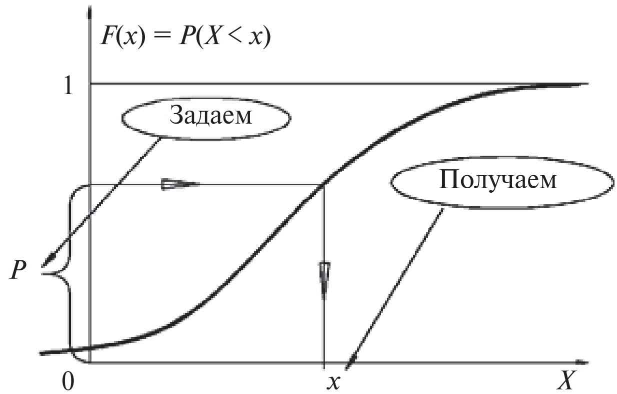


Рис. 2.28. Определение квантиля x_p через известное значение вероятности p

Определение квантиля с использованием графика плотности распределения

На графике плотности распределения (например, на эмпирическом графике, см. рис. 2.5) вероятность P того, что случайная величина X не превысит конкретное числовое значение x, равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой плотности распределения, снизу — осью абсцисс и справа — вертикалью, проходящей через x. Поэтому для определения квантиля x_p порядка P по этому графику (рис. 2.29) необходимо подобрать x_p таким образом, чтобы проведенная через это x_p вертикаль отсекала бы слева площадь равную P.

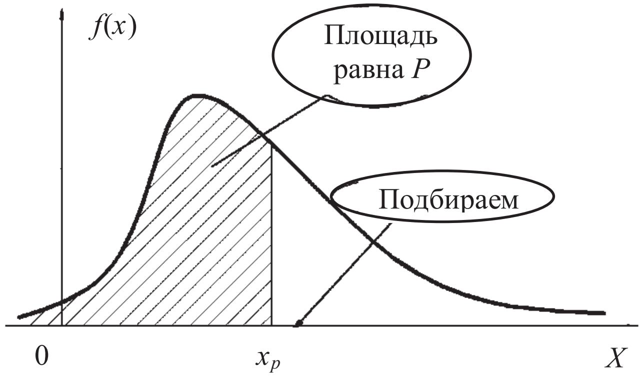


Рис. 2.29. Определение квантиля x_p порядка P

Если единицами площади имеющегося графика плотности распределения пользоваться неудобно, то можно применить любые удобные единицы измерения площади (мм^2, in^2, квадратики, треугольники и т. д.):

- определить полную площадь под кривой плотности распределения ω_Σ на интервале от $-\infty$ до $+\infty$;
- рассчитать площадь, отвечающую вероятности P, в тех же единицах площади $\omega_1 = P\omega_\Sigma$;
- подобрать x_p таким образом, чтобы проведенная через это x_p вертикаль отсекала бы слева площадь равную ω_1.

Понятно, что такая процедура поиска квантиля является весьма неудобной и затратной по времени, и ее имеет смысл применять, только если нет другой возможности.

Определение квантиля по таблицам функции распределения

Поскольку квантиль является обратной функцией к функции распределения, то для определения квантиля x_p можно использовать таблицы функций распределения $F(x) = P(X \le x)$. Для этого в центральной части таблицы (в «теле» таблицы) следует выбрать необходимую величину вероятности P и определить значение интересующего квантиля x_p в шапке или 1-м столбце таблицы либо учесть пересечение соответствующей строки и столбца (как, например, при использовании таблицы стандартного распределение Лапласа — Гаусса (см. прил. 1).

Если не удается найти в таблице точное интересующее значение вероятности P, то можно взять из таблицы два ближайших значения (меньшее P_1 и большее P_2) и определить для них соответствующие значения случайной величины x_1 и x_2. Интересующее значение квантиля x_p можно определить, используя линейную интерполяцию

$$x_p = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{P_2 - P_1}\left(P - P_1\right).$$

Определение квантиля с использованием аналитической зависимости, обратной к функции распределения

Для большого количества распределений известно уравнение функции распределения $F(x)$. В ряде случаев, при достаточно простой форме уравнения, для функции распределения $F(x)$, используя обычные математические преобразования, возможно получить обратную зависимость к $F(x)$ в виде $x_p = \varphi(P)$, т. е. получить аналитическое выражение зависимости значения квантиля x_p от вероятности P.

Определение квантиля с использованием аналитической записи функции распределения численным методом

Использовать способ, рассмотренный в п. 2.5.5, не всегда рационально в связи с возникающими математическими трудностями преобразований. Иногда вообще не удается аналитически получить обратную зависимость для функции распределения $F(x)$. В этой ситуации, если процесс расчета функции распределения $F(x)$ достаточно прост, определение квантиля x_p может быть проведено одним из большой группы известных численных методов, например методом последовательной дихотомии при решении уравнения $P - F\left(x_p\right) = 0$.

Определение квантиля с использованием его аппроксимирующих зависимостей от вероятности

В значительном числе случаев выражение, отражающее точную аналитическую зависимость значения квантиля от вероятности, является достаточно сложным и его использование может оказаться сопряженным со значительными математическими трудностями преобразований. Поэтому, при условии частого использования, есть целесообразность в получении более простых аппроксимирующих выражений, например следующих [12]:

1. Аппроксимации квантилей *стандартного нормального закона распределения* (квантилей стандартного распределения Лапласа — Гаусса):

- аппроксимация 1

$$u_p = t - \frac{2{,}515517 + 0{,}010328t + 0{,}010328t^2}{1 + 1{,}432788t + 0{,}189269t^2 + 0{,}001308t^3},$$

где $t = \sqrt{\left[-2\ln\left(1-p\right)\right]}$.

Абсолютная погрешность не более 0,00045;

- аппроксимация 2

$$u_p = 4{,}91\left[p^{0,14} - \left(1-p\right)\right]^{0,14}.$$

Относительная погрешность не более 0,3 %;

- аппроксимация 3

$$u_p = 2{,}0637\left[\ln\frac{1}{1-p} - 0{,}16\right]^{0,4274} - 1{,}5774.$$

Рекомендуется при $0{,}5 \leqslant p \leqslant 0{,}999$.

Абсолютная погрешность не более 0,0008;

- аппроксимация 4

$$u_p = \sqrt{\pi\left\{\frac{1}{23}\left[-\ln(1-p)^{\frac{5}{4}}\right] - \ln\sqrt{2(1-p)}\right\}}.$$

Рекомендуется использовать при $1{,}244 \cdot 10^{-5} \leqslant p < 0{,}0455$ и $2 \leqslant u_p \leqslant 8$. Относительная погрешность не более 0,6 %;

- аппроксимация 5

$$u_p = \frac{1{,}24 + 0{,}85k^{0{,}657}}{1 + 0{,}0001k^3 + \dfrac{2{,}38}{k}},$$

где $k = -\ln\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)$.

Рекомендуется использовать при $p > 0{,}5$.
Относительная погрешность 0,3 %.

2. Аппроксимации квантилей χ^2-*распределения* (квантилей распределение Пирсона).

Для упрощения записей обозначим квантиль u_p порядка p стандартизованного нормального закона распределения величиной X: $X = u_p$:

- аппроксимация 1

$$\chi^2(\nu) = \nu\left\{1 - \frac{2}{9\nu} + \frac{4X^4 + 16X^2 - 2904}{229635\nu^3} + \left(\frac{2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\dfrac{X}{3} + \left(-X^3 + 3X\right)}{162\nu} - \frac{3X^5 + 40X^3 + 45X}{5832\nu^2} + \frac{301X^7 - 1519X^5 - 3269X^3 - 79349X}{7873200\nu^3}\right)\right\};$$

- аппроксимация 2

$$\chi_P^2(\nu) = \nu\left(\sum_{i=0}^{6}\nu^{-\frac{i}{2}}X^i\left(a_i + b_i\nu^{-1} + c_i\nu^{-2}\right)\right)^3,$$

в которой необходимо принять следующие коэффициенты:

$a_0 = 1{,}0000886$; $b_0 = -0{,}223768$; $c_0 = -0{,}01513904$;
$a_1 = 0{,}4713941$; $b_1 = 0{,}02607083$; $c_1 = -0{,}008986007$;
$a_2 = 0{,}0001348028$; $b_2 = 0{,}01128186$; $c_2 = 0{,}2277679$;
$a_3 = -0{,}008553069$; $b_3 = -0{,}1153761$; $c_3 = -0{,}01323293$;
$a_4 = 0{,}00312558$; $b_4 = 0{,}005169654$; $c_4 = -0{,}006950356$;

$a_5 = -0{,}0008426812$; $b_5 = 0{,}00253001$; $c_5 = 0{,}001060438$;
$a_6 = 0{,}00009780899$; $b_6 = -0{,}001450117$; $c_6 = 0{,}00156326$;

- аппроксимация 3

$$\chi_p^2(\nu) = \nu\left\{1 - \frac{2}{9\nu} + (X - h_\nu)\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right\},$$

где $h_\nu = -\frac{2}{27\nu}\left(\frac{2\sqrt{2}(X^2-1)}{3\sqrt{\nu}} - \frac{X^3 - 3X}{4}\right)$;

- аппроксимация 4

$$\chi_p^2(\nu) = \frac{1}{13}\left\{12\nu\left[\frac{5X}{6\left(1-\frac{1}{18\nu}\right)\sqrt{12\nu}} + 1 - \frac{5}{18\nu}\left(1+\frac{7}{48\nu}\right)\right]^{\frac{13}{5}} + \nu\right\};$$

- аппроксимация 5

$$\chi_p^2(\nu) = \nu + X\sqrt{2\nu} + \frac{2}{3}(X^2-1) + \frac{1}{9\sqrt{2\nu}}(X^2 - 7X).$$

Точность этих аппроксимаций существенно зависит от величины параметра ν. С увеличением ν точность возрастает.

3. Аппроксимации квантилей *t-распределения* (квантилей распределение Стьюдента).

Для упрощения записей обозначим $X = u_p$, где u_p — квантиль порядка p стандартизованного нормального закона распределения:

- аппроксимация 1

$$t_p(\nu) = X\left\{1 + \frac{X^2+1}{4\nu} + \frac{5X^4 + 16X^2 + 3}{96\nu^2} + \frac{3X^6 + 19X^4 + 17X^2 + 15}{384\nu^3}\right\};$$

- аппроксимация 2

$$t_p(\nu) = \left[-0{,}0953 - \frac{0{,}831}{\nu+1} + \frac{0{,}81}{\sqrt{-\ln(4p(1-p))}} + 0{,}076\left(4p\sqrt{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right];$$

- аппроксимация 3

$$t_p(\nu) = X\left(1 - \frac{X^2+1}{4\nu}\right)^{-1};$$

- аппроксимация 4

$$t_p(\nu) = \left\{\nu\left[\exp\left(\frac{X^2}{0{,}9975\nu - 0{,}445}\right) - 1\right]\right\};$$

- аппроксимация 5

$$t_p(\nu) = X\left\{1 - (0{,}325 - 0{,}022\ln\nu)\frac{1+\ln\left(p(1-p) + 0{,}004\frac{\nu-5}{\nu}\right)}{\nu}\right\}.$$

4. Аппроксимации квантилей *F-распределения* (квантилей распределение Фишера).

Обозначим u_p — квантиль порядка p стандартного нормального закона распределения; ν_1 и ν_2 — параметры распределение Фишера:

- аппроксимация 1

$$F_p(\nu_1,\nu_2) = 9\nu_2\left\{\frac{\frac{\nu_2}{\nu}\left[(9\nu_1-2)(9\nu_2-2) + 3u_p\left\{2\nu_1(9\nu_2-2)^2 - 36\nu_1\nu_2u_p^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]}{(9\nu_2-2)^2 - 18\nu_2u_\text{p}^2}\right\}^3;$$

- аппроксимация 2

$$F_p(\nu_1,\nu_2) = \exp(2z),$$

где $z = \dfrac{u_p(h+\nu)}{h} + \left(\dfrac{1}{\nu_2-1} + \dfrac{1}{\nu_1-1}\right)\left\{\dfrac{5}{6} + \nu - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\nu_2-1} + \dfrac{1}{\nu_1-1}\right)\right\},$

$h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\nu_2-1} + \dfrac{1}{\nu_1-1}}$, $\nu = \dfrac{1}{6}\left(u_p^2 - 3\right);$

- аппроксимация 3

$$\lg F_p(\nu_1,\nu_2) = a(h-b)^{-\frac{1}{2}} - cg,$$

где $h = \dfrac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}$; $g = \dfrac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1\nu_2}$; коэффициенты *a*, *b* и *c* приведены ниже.

p	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
a	0	0,5859	1,1131	1,4287	1,7023	2,0206	2,2373	2,6841	2,858
b	–	0,58	0,77	0,95	1,14	1,4	1,61	2,09	2,3
c	0,290	0,355	0,527	0,681	0,846	1,073	1,25	1,672	1,857

Определение квантиля по таблицам квантилей распределения

В п. 2.4.4 был рассмотрен способ определения квантиля с использованием таблиц функции распределения и представления о квантиле как обратной функции к функции распределения случайной величины. Такой способ определения квантиля не сложен, но несколько неудобен в связи с необходимостью отыскании заданного значения вероятности *p* «в теле» таблицы. Другим неудобством такого способа является то, что «в теле» таблицы вероятности *p* приводятся не с каким-то определенным шагом, а так, как получилось в результате расчета функции распределения случайной величины.

Поэтому для распределений случайных величин, часто используемых на практике, создают специализированные таблицы квантилей как функции от вероятности *p* и параметров, входящих в конкретное распределение. Фактически такие таблицы квантилей являются обратными таблицами к таблицам соответствующих функций распределения.

Таблицы квантилей для широко используемых законов распределений случайных величин можно найти в большом количестве учебников и справочников, некоторые из таких таблиц приведены и в прил. 5–8 данного учебного пособия.

Определение квантиля в Excel 2007

Для отыскания квантилей распределений, доступных в Excel, необходимо любым из рассмотренных выше способов вызвать окно «Мастера функций», например в главном окне Excel, в строке формул выбрать кнопку Вставить функцию (или использовать кнопку заранее вынесенную и на панель быстрого доступа, рис. 2.30).

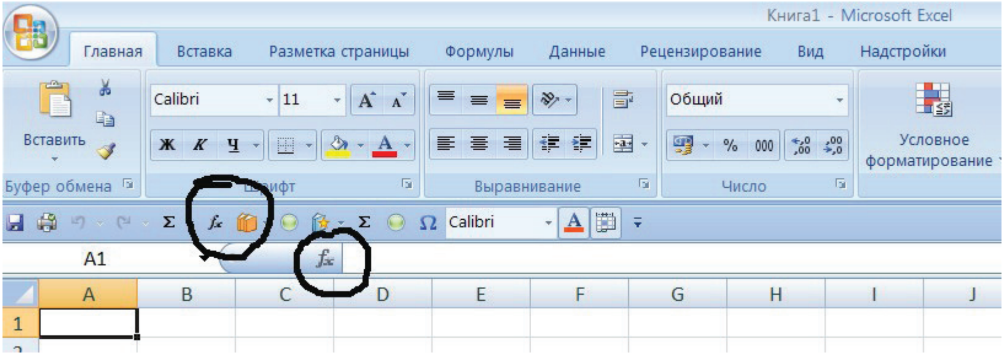


Рис. 2.30. Окно «Мастер функций»

В открывшемся окне «Мастер функций — шаг 1 из 2» в меню «Категории» выбрать Статистические, затем из появившегося списка функций «Выберете функцию» выбрать интересующую функцию, определяющую требуемый квантиль, и нажать ОК.

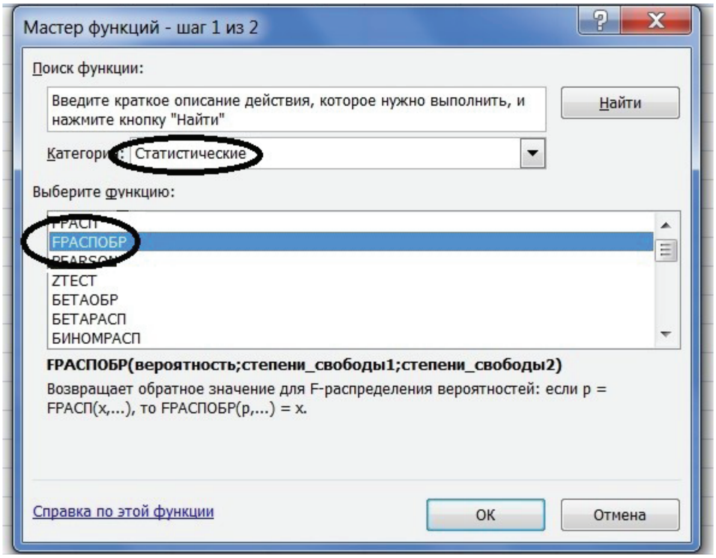


Рис. 2.31. Окно «Мастер функций — шаг 1 из 2»

В появившемся окне «Аргументы функции» для выбранного распределения необходимо ввести значение вероятности, для которой необходимо определить величину квантиля данного распределения и, кроме того, числовые значения параметров данного распределения (для каждого распределения свои, см. с. 64). Нажать ОК.

Результат расчета будет помещен в текущую ячейку текущего листа Excel.

Перечень всех функций Excel 2007, определяющих квантили различных распределений и параметры распределений, значения которых необходимо вводить, приведен в таблице ниже.

Функции Excel, определяющие квантили различных распределений

№ п/п	Функции Excel	Распределение	Параметры распределения
1	FРАСПОБР	Распределение Фишера (F-распределение)	ν_1 и ν_2 — числа степеней свободы
2	БЕТАОБР	β-распределение (бета-распределение)	α- и β-параметры распределения
3	ГАММАОБР	γ-распределение (гамма-распределение)	α- и β-параметры распределения
4	ЛОГНОРМОБР	Логарифмическое нормальное распределение	$\bar{x}$ и s — среднее арифметическое и стандартное отклонение логарифмов случайной величины
5	НОРМОБР	Нормальное распределение	$\bar{x}$ и s — среднее арифметическое и стандартное отклонение
6	НОРМСТОБР	Стандартное нормальное распределение	Нет
7	СТЬЮДРАСПОБР	Распределение Стьюдента (t-распределение)	ν — число степеней свободы
8	ХИ2ОБР	Распределение Пирсона (χ^2-распределение)	ν — число степеней свободы

2.6. Числовые характеристики случайных величин

Рассмотренный способ описания случайных величин с использованием законов распределения их вероятностей, описываемых при помощи функции распределения и плотности распределения, является наиболее подробным способом. Но в ряде случаев использование такого описания становится затруднительным и нерациональным в связи с возникающими трудностями математических преобразований уравнений, описывающих распределения.

Более простым, менее подробным, но при решении ряда практических задач более удобным способом описания случайных величин и их свойств является использование так называемых «числовых характеристик случайных величин». Их назначение — в сжатой, компактной форме выразить наиболее важные с практической точки зрения особенности распределения вероятностей случайной величины, такие особенности, которые значимо отличали бы одну случайную величину от другой.

Числовая характеристика (случайной величины) — специализированная величина, описывающая в численной форме какое-то конкретное свойство распределения вероятностей случайной величины.

Важной особенностью числовых характеристик является отсутствие в их формулировках вероятностного содержания, присущего самой описываемой случайной величине и закону ее распределения. Данная особенность существенно облегчает понимание и использование числовых характеристик и во многом обусловливает широкое их применение в практике статистических исследований. Числовые характеристики позволяют приписать случайным, вероятностным величинам детерминированные, однозначно определенные свойства.

Известно, а также можно придумать достаточно большое количество различных методов и методик формулирования числовых характеристик, однако наиболее часто используют числовые характеристики, сформулированные на основе так называемой «*теории моментов*». При этом используют понятия «математическое ожидание», «момент порядка q относительно начала отсчета», «момент порядка q относительно a» и «центральный момент порядка q».

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **математическое ожидание (случайной величины)** (expectation; expected value; mean) определяется так:

- для дискретной случайной величины X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i, математическое ожидание, если оно существует, определяют по формуле

$$\mu = E(x) = \Sigma p_i x_i, \tag{2.27}$$

  где суммируют все значения x_i, которые может принимать случайная величина X;
- для непрерывной случайной величины X, имеющей плотность $f(x)$, математическое ожидание, если оно существует, определяют по формуле

$$\mu = E(x) = \int x f(x) dx, \tag{2.28}$$

в которой интеграл берут по всему интервалу (интервалам) изменения X.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **момент порядка *q* относительно начала отсчета** (moment of order q about the origin) — математическое ожидание случайной величины в степени q для одномерного распределения $E\left(X^q\right)$.

Примечание: момент первого порядка — математическое ожидание случайной величины $X\left(\mu_x = E(x)\right)$.

Момент порядка q относительно начала отсчета в литературе называют также «начальный моментом порядка q» или еще проще — моментом порядка q в соответствии с формулировкой из ранее действовавшего ГОСТ 15895–77.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **момент порядка *q* относительно *a*** (moment of order q an origin a) — математическое ожидание величины $(X - a)$ в степени q для одномерного распределения $E\left[(X - a)^q\right]$.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **центральный момент порядка *q*** (central moment of order q) — математическое ожидание центрированной случайной величины для одномерного распределения $E\left[(X - \mu_x)^q\right]$.

Примечание: центральный момент второго порядка — дисперсия случайной величины X.

Как и у всякого объекта реального мира, у любой случайной величины и распределения ее вероятности имеется большое количество свойств и особенностей, следовательно, можно сформулировать большое количество числовых характеристик, описывающих эти свойства и особенности. Однако наибольшую применимость имеет достаточно ограниченный класс числовых характеристик, описывающих наиболее важные с практической точки зрения свойства рассматриваемой случайной величины. Поэтому по достаточно условному признаку — по частоте использования — все числовые характеристики можно разделить на две группы:

- основные числовые характеристики;
- дополнительные числовые характеристики.

К группе «основные числовые характеристики» отнесем только три наиболее часто используемые числовые характеристики, а именно:

«математическое ожидание», «дисперсию» и «стандартное отклонение». Остальные известные числовые характеристики и те, которые можно принципиально сформулировать вновь, отнесем ко второй группе — «дополнительные числовые характеристики».

Определение математического ожидания случайной величины по ГОСТ Р 50779.10–2000 приведено выше (выражения (2.27) или (2.28)). Известно и другое, более простое, менее формальное определение для «математического ожидания случайной величины», по-другому отражающее смысл этого понятия.

По ГОСТ 15895–77 **математическим ожиданием случайной величины** называется среднее, взвешенное по вероятностям, значение случайной величины

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx. \qquad (2.29)$$

В соответствии с известными геометрическими трактовками определенных интегралов выражение (2.29) используется для расчета абсциссы центра тяжести фигуры, ограниченной сверху кривой $f(x)$, снизу осью абсцисс и по бокам вертикалями $x = -\infty$ и $x = +\infty$. Отсюда следует геометрическая трактовка математического ожидания: математическое ожидание случайной величины X представляет собой абсциссу центра тяжести плоской фигуры, расположенной под кривой плотности распределения этой случайной величины на всем интервале ее возможных значений.

Проще говоря, математическое ожидание случайной величины характеризует, описывает абсциссу весового центра вероятностного распределения этой случайной величины, а также совпадает с этой абсциссой.

Для распределений, имеющих график плотности распределения с симметрией относительно вертикальной оси (например, равномерное, нормальное, распределение Стьюдента и т. п.), математическое ожидание совпадает с осью симметрии распределения и со значением медианы (значение случайной величины с равной вероятностью ее превышения и непревышения). Для симметричных и так называемых одномодальных распределений (имеют одну точку максимума на графике плотности распределения) математическое ожидание, кроме того, совпадает со значением моды (с положением максимума кривой плотности распределения на оси случайной величины).

Изменение значения математического ожидания приводит к смещению на соответствующих графиках кривых функции распределения и плотности распределения путем параллельного их переноса вдоль оси абсцисс на величину, равную величине изменения математического ожидания (рис. 2.32 и рис. 2.33).

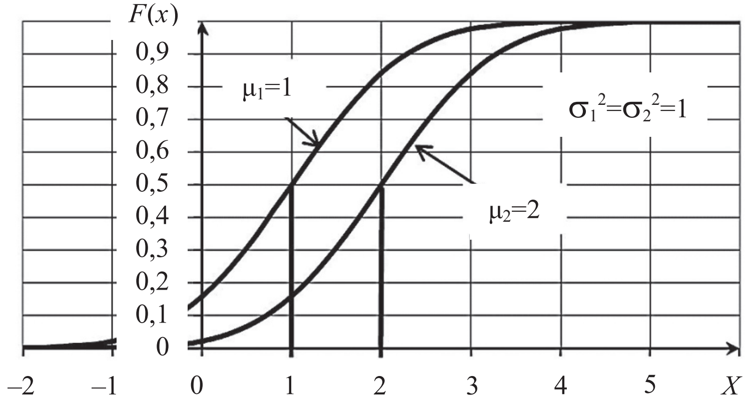


Рис. 2.32. Функции нормального закона распределения при разных математических ожиданиях и одинаковой дисперсии

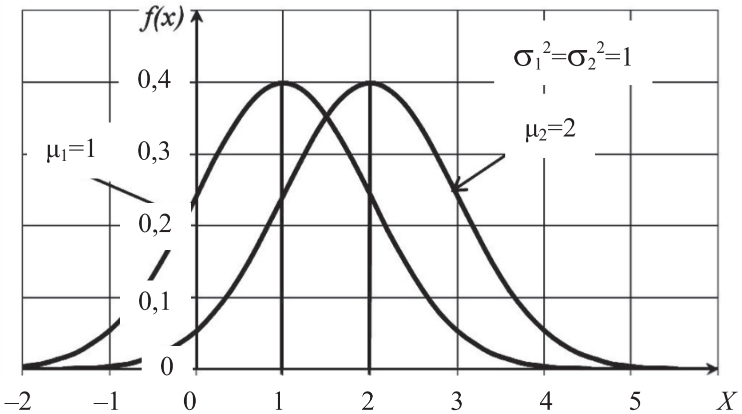


Рис. 2.33. Плотности нормального закона распределения при разных математических ожиданиях и одинаковой дисперсии

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **дисперсия (случайной величины)** (variance) — математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины

$$\sigma^2 = V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2. \tag{2.30}$$

По ГОСТ 15895–77 **дисперсия случайной величины** — это центральный момент порядка 2:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx. \qquad (2.31)$$

Для понятия «дисперсия» можно дать другое, более подробное определение, построенное на основе формулы (2.31), по аналогии с приведенным выше определением математического ожидания случайной величины.

Дисперсией случайной величины называется средневзвешенный по вероятностям квадрат отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия служит характеристикой рассеяния, разброса случайной величины X вокруг центра распределения (вокруг математического ожидания μ). В соответствии с выражениями (2.30) и (2.31). Чем больше разброс, рассеяние опытных значений относительно μ, тем больше численное значение σ^2.

Для нормального закона распределения величина дисперсии геометрически определяет точку перегиба кривой плотности распределения.

Изменение значения дисперсии (при постоянном математическом ожидании) приводит на соответствующих графиках к сжатию (при уменьшении σ^2) или растяжению (при увеличении σ^2) кривых и функции распределения и плотности распределения вдоль оси абсцисс, как показано на рис. 2.34 и рис. 2.35.

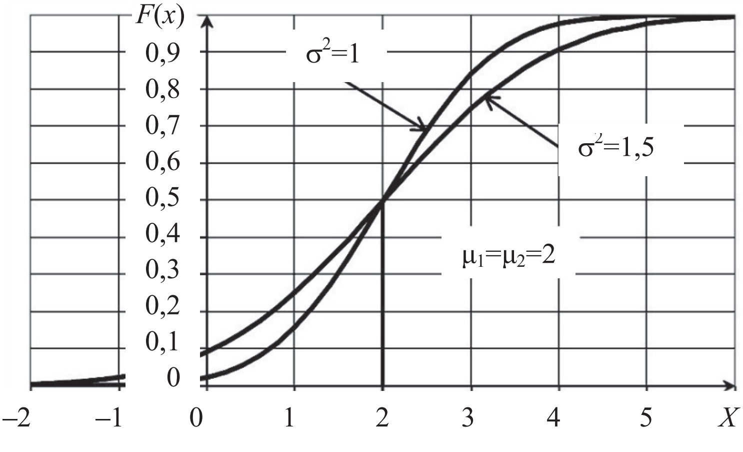


Рис. 2.34. Функции нормального закона распределения при одинаковых математических ожиданиях и разной дисперсии

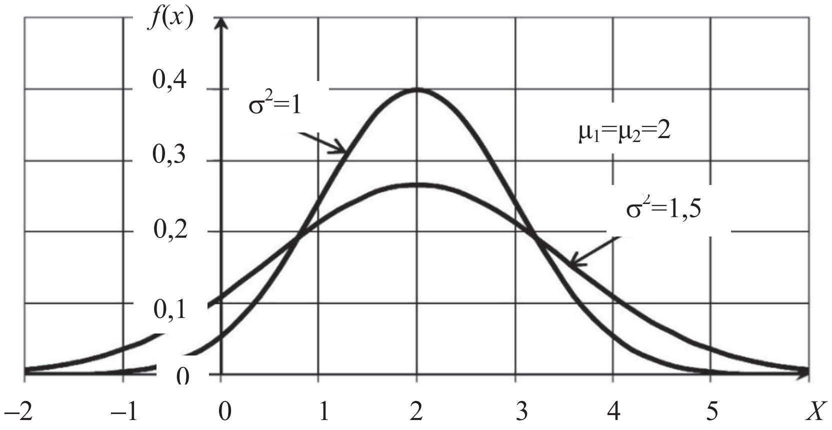


Рис. 2.35. Плотности нормального закона распределения при одинаковых математических ожиданиях и разной дисперсии

Недостатком дисперсии как числовой характеристики, используемой в качестве меры рассеяния, является то, что она выражается в квадратных единицах рассматриваемой случайной величины. Например, если случайная величина X имеет размерность в метрах (м), то ее математическое ожидание μ_x так же будет иметь размерность в метрах (м), а дисперсия μ_X^2 будет иметь размерность в метрах в квадрате (м^2). И, например, сравнивать эти величины (x, м; μ_x, м, и μ_X^2, м^2) некорректно. В ряде случаев, размерность дисперсии вообще не имеет какого-либо физического смысла (например, амперы в квадрате, А^2).

Поэтому, кроме дисперсии, за меру рассеяния случайной величины принимают положительное значение квадратного корня из дисперсии, которое называют **стандартным отклонением**. Стандартное отклонение имеет ту же размерность, что и сама описываемая случайная величина.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **стандартное отклонение (случайной величины) (**standard deviation) — положительный квадратный корень из значения дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}. \qquad (2.32)$$

С учетом принятого ранее обозначения дисперсии σ^2 выражение (2.32) можно записать в виде

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}.$$

В ранее действовавших ГОСТах и значительном количестве изданной в те времена литературы, посвященной статистическим методам, для обозначения этой же величины вместо термина «стандартное отклонение» использовали термин «среднеквадратическое отклонение».

Математическое ожидание μ, дисперсия s^2 и однозначно связанное с дисперсией s^2 среднеквадратическое отклонение σ являются наиболее употребительными числовыми характеристиками случайной величины. Например, они полностью определяют положение и вид кривых наиболее часто используемого на практике нормального закона распределения (см. п. 2.4.2). Более того, числовые параметры, используемые в выражениях для функции и плотности распределения нормально распределенной случайной величины (μ, σ и s^2 в выражениях (2.13) и (2.14)), по своим числовым значениям полностью совпадают с вышеопределенными числовыми характеристиками μ, σ и s^2 (совпадение обозначений не случайно). Данное обстоятельство (совпадение значений величин μ, σ и s^2 для нормального закона распределения) часто приводит к некоторому смешению этих понятий. Следует четко различать: параметры распределения — это величины, предназначенные для адаптации, «настройки» теоретического закона распределения под конкретный случай описания случайной величины, и поэтому для конкретной случайной величины они принимают конкретные числовые значения, а назначение числовых характеристик — в сжатой, компактной численной форме описать какое-то свойство, особенность случайной величины. И полное совпадение этих по сути своей различных величин в нормальном законе распределения по числовым значениям является лишь частным случаем, характерным только лишь для нормального закона. В подавляющем большинстве других законов распределения такого совпадения нет.

Из определения математического ожидания μ и дисперсии σ^2 следуют их свойства. Вот некоторые из них (принимаем a и b — постоянные, X — случайная величина):

- математическое ожидание постоянной величины a равно самой этой величине:
$$\mu(a) = a;$$
- математическое ожидание произведения постоянной величины a на случайную величину X равно произведению постоянной величины a на математическое ожидание случайной величины X:
$$\mu(aX) = a\mu(X);$$

- математическое ожидание линейной комбинации случайной величины X

$$\mu(aX+b)=a\mu(X)+b;$$

- дисперсия постоянной величины a равна нулю:

$$\sigma^2(a)=0;$$

- дисперсия произведения постоянной величины a на случайную величину X равна произведению квадрата постоянной величины a на дисперсию случайной величины X:

$$\sigma^2(aX)=a^2\mu(\mathrm{X});$$

- дисперсия линейной комбинации случайной величины X

$$\sigma^2(aX+b)=a^2\sigma^2(X).$$

2.7. Расчет вероятности обнаружения значения случайной величины в заданном диапазоне числовых значений

Случайная величина в соответствии с определением (см. подглаву 2.1) может принимать любое из области своих возможных значений. И предсказать заранее, какое значение этой величины будет наблюдаться в очередном опыте, нельзя. Но на практике оказывается, что частота возможности наблюдения различных значений рассматриваемой случайной величины или значений, принадлежащих различным числовым интервалам, может оказаться различной (или одинаковой, что наблюдается реже). Причем оказывается, что для большинства случайных величин, каждая из которых измеряется большое количество раз в стабильных условиях проведения эксперимента, частотная характеристика для разных значений (или интервалов) является устойчивой и подчиняется определенной закономерности. Для описания частоты возможности наблюдения разных значений и для формализации закономерностей частотных характеристик используют понятие «вероятность».

По ГОСТ 50779.10–2000 **вероятность** — действительное число в интервале от 0 до 1, относящееся к случайному событию.

Примечания из ГОСТ Р 50779.10–2000:

1. Вероятность может отражать относительную частоту в серии наблюдений или степень уверенности в том, что некоторое событие произойдет. Для высокой степени уверенности вероятность близка к единице.

2. Вероятность события A обозначают $P_r(A)$ или $P(A)$.

Обозначим величинами a и b конкретные числовые значения случайной величины X. Под событием A, упомянутым в приведенном выше определении вероятности, будем понимать факт попадания значения случайной величины в конкретный диапазон числовых значений ($a < X \leqslant b$).

Практическое значение имеет расчет вероятности обнаружения значений случайной величины X в следующих диапазонах числовых значений (a и b конкретные числа):

$$P_1(A) = P(-\infty < X \le a) = P(X \le a); \tag{2.33}$$

$$P_2(A) = P(a < X \le +\infty) = P(X > a); \tag{2.34}$$

$$P_3(A) = P(a < X \le b). \tag{2.35}$$

Выражения (2.33)—(2.34) можно обобщить выражением (2.35), если допустить, что числовые значения a и b могут принимать и бесконечные значения ($a = -\infty$, $b = +\infty$).

Определить или рассчитать величину вероятности обнаружения значений случайной величины X в диапазоне значений от a до b можно различными способами в соответствии с имеющейся исходной информацией. Рассмотрим следующие возможности такого расчета:

- прямое использование опытных значений;
- использование функции распределения $F(x)$ случайной величины X в разных вариантах ее задания:
  - график функции распределения;
  - аналитическое описание функции распределения;
  - табличное описание функции распределения;
- использование плотности распределения $f(x)$ случайной величины X в разных вариантах ее задания:
  - график функции плотности распределения;
  - аналитическое описание функции плотности распределения;
  - табличное описание функции плотности распределения.

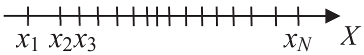
Рассмотрим отдельно перечисленные способы расчета вероятности $P(A)$, понимая под событием A факт попадания значения случайной величины в интервал от a до b (a может принимать как конечное значение, так $-\infty$, b также может быть конечным или принимать значение $+\infty$, причем примем $a < b$).

2.7.1. Расчет вероятности *P*(*A*) с использованием опытных значений случайной величины

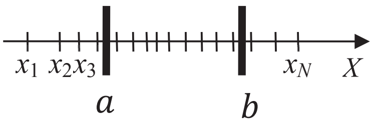
Исходная информация в этом случае должна представлять собой массив опытных значений случайной величины X объемом N (количество опытных значений N).

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в любой из диапазонов значений от a до b, обобщенных выражением (2.35), можно провести в следующей последовательности:

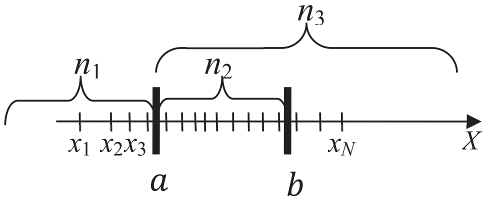
- распределить опытные значения в вариационный ряд по возрастающей, так чтобы $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$, где N — количество опытных значений,



- установить местоположение границ интересующего интервала значений



- подсчитать количество опытных значений n_i, попавших в интересующий интервал значений,



где n_1 — количество опытных значений, попавших в интервал от $-\infty$ до a, n_2 — в интервал от a до b, n_3 — в интервал от a до $+\infty$;

- рассчитать искомую вероятность

$$P_i(A) = P(a \le X \le b) = \frac{n_i}{N}.$$

2.7.2. Расчет вероятности с использованием функции распределения

В соответствии с определением (2.1) (см. подглаву 2.1), функция распределения $F(x)$ случайной величины X равна вероятности непревышения этой случайной величиной некоторого конкретного числа x: $F(x) = P(X \le x)$. Поэтому для отыскания вероятности события A, состоящего в непревышении случайной величиной некоторого значения a, т. е. $P(A) = P(X \le a)$, достаточно отыскать каким-то образом значение функции распределения $F(a)$ и принять, что $P(A) = P(X \le a) = F(a)$. Аналогично, если под событием A понимать факт непревышения случайной величиной X значения b, то вероятность такого события будет равна значению функции распределения этой случайной величины $F(x)$ при $x = b$: $P(A) = P(X \le a) = F(a)$. И, наконец, если под событием A понимать факт попадания значения случайной величины X в диапазон значений от a до b ($a < b$), то нетрудно догадаться, что вероятность такого события будет равна разности значений функции распределения, рассчитанных при $x = a$ и $x = b$:

$$P(A) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a). \tag{2.36}$$

Отыскание значения функции распределения $F(x)$ для конкретного числового значения аргумента x (в нашем случае a или b) можно произвести по-разному, в зависимости от имеющейся исходной информации.

Расчет вероятности с использованием функции распределения, заданной в виде графика

Если в распоряжении имеется график функции распределения $F(x)$ для исследуемой случайной величины X, то значения $F(x = a)$ и $F(x = b)$ можно определить по этому графику (рис. 2.36).

В качестве графика функции распределения может быть использован как график функции любого теоретического распределения, приведенный в справочнике, так и эмпирический график, построенный по опытным данным, например с помощью алгоритма, приведенного в подглаве 2.2.

Используя значения $F(a)$ и $F(b)$, полученные на графике функции распределения (рис. 2.36), можно рассчитать искомую вероятность по выражению (2.36). Аналогичным образом можно рассчитать вероятность и при других способах определения значений функции распределения, рассмотренных ниже.

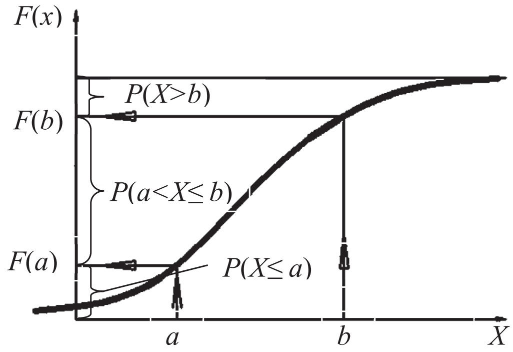


Рис. 2.36. Использование графика функции распределения для расчета вероятности

Расчет вероятности с использованием аналитической формы задания функции распределения

При наличии формулы для расчета функции распределения $F(x)$ исследуемой случайной величины X (например, формул, приведенных в подглаве 2.4), значения $F(a)$ и $F(b)$ можно определить расчетным путем, подставив в эту формулу $x = a$ и $x = b$, при этом необходимо, чтобы были известны или предварительно оценены числовые значения параметров этого распределения.

При наличии значительных затруднений в расчетах интегралов, входящих в расчетные выражения, можно использовать аппроксимирующие зависимости более простой структуры, позволяющие упростить данные расчеты и обеспечить достаточную для практических целей их точность. Аппроксимирующие зависимости, существенно упрощающие расчеты, получены для большинства широко используемых распределений. Примеры таких аппроксимирующих выражений приведены в подглаве 2.4, большое количество известных аппроксимаций этой направленности приведено в справочнике [12].

Рассчитывается искомая вероятность события A (попадания значения случайной величины X в интересующий диапазон числовых значений) по выражению (2.36) в зависимости от сути события A.

Расчет вероятности с использованием табличной формы задания функции распределения

Рассмотренные в предыдущем пункте (см. с. 91) процедуры определения вероятностей с использованием аналитических форм представления функции распределения $F(x)$ или аппроксимирующих эти функции выражений сопряжены с необходимостью проведения значительного количества расчетов, и в ряде случаев, не очень простых. В таких ситуациях для определения значений функции распределения удобно использовать табличный способ представления этих функций. Для большинства широко используемых распределений такие таблицы рассчитаны и довольно широко представлены в литературе [12, 14–22] и др. Некоторые из таких таблиц приведены в прил. 1–8.

Довольно часто при использовании таблиц функции распределения (и таблиц квантилей) приходится прибегать к преобразованию реально наблюдаемой в эксперименте случайной величины X со сложным для вычисления законом распределения к некоторой другой случайной величине, например, U, функция распределения которой табулирована. При этом обычно преобразуются только координаты самой случайной величины (например, исходная координата x_1 преобразуется в u_1 или x_2 преобразуется в u_2), а значения функции распределения для соответствующих значений исходной и преобразованной случайных величин совпадают ($F(x_1) = F(u_1)$ и $F(x_2) = F(u_2)$. Поэтому справедливо соотношение

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(u_1 < U \le u_2),$$

где u_1 и u_2 — границы интересующего диапазона значений случайной величины U, полученные путем преобразования соответствующих границ x_1 и x_2 исходной случайной величины X.

В качестве примера рассмотрим наиболее часто используемый на практике случай — расчет вероятности попадания значения случайной величины X с нормальным законом распределения и известными или оцененными параметрами распределения μ и σ в некоторый диапазон значений от a до b.

Расчет значений функции распределения $F(a)$ и $F(b)$ исходной нормально распределенной случайной величины X, предусмотренный в п. 2.7.2, затруднен сложностью выражения (2.13) (см. п. 2.4.2). Для упрощения процедуры расчета вероятности $P(a < X \le b)$, в этом случае целесообразно использовать операцию нормирования, рассмотренную в п. 2.4.3.

Используя простое выражение (2.17) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, можно преобразовать нормально распределенную случайную величину X к стандартизованному виду U. При этом исходные границы рассматриваемого диапазона значений a и b преобразуются в стандартизованные значения $u_a = \dfrac{a - \mu}{\sigma}$ и $u_b = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$.

Значения функции распределения для стандартизованного нормального закона распределения $\Phi(u_a)$ и $\Phi(u_b)$ можно определить по широко распространенным таблицам этой функции, например приведенным в прил. 1.

Поскольку при использовании операции нормирования предусмотрено только преобразование координаты X к стандартизованному виду U, а значения функции распределения при этом не преобразуются, то справедливы равенства

$$F(a) = \Phi(u_a) \text{ и } F(b) = \Phi(u_b).$$

Искомая вероятность события A (попадание значения случайной величины X в интересующий диапазон числовых значений) рассчитывается с использованием преобразования

$$P(A) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(u_a < U \le u_b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Еще одним способом определения значения функции распределения для целей отыскания вероятности попадания значения случайной величины X в некоторый диапазон значений от a до b является использование статистических функций Excel. В версии 2007 доступен расчет значений функции распределения для случайных величин, подчиненных распределениям, перечисленным на с. 64. Там же указано наименование функции, используемое в Excel для обозначения соответствующего распределения. Возможные варианты доступа к статистическим функциям Excel подробно рассмотрены в пп. 2.4.3, 2.4.6–2.4.8.

Для расчета вероятности попадания значения случайной величины X в некоторый диапазон значений от a до b необходимо определить в Excel значения функции распределения для этих границ — $F(a)$

и $F(b)$, используя статистическую функцию Excel, соответствующую рассматриваемому распределению, и рассчитать

$$P(A) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a).$$

Расчет вероятности с использованием плотности распределения

В подглаве 2.1 получено выражение $f(x) \cdot \Delta x \approx P(x_1 < X \le x_2)$. При принятых обозначениях границ *a* и *b* выражение (2.10) примет вид

$$f(x) \cdot \Delta x \approx P(a < X \le b). \tag{2.37}$$

Перейдем в выражении (2.37) к бесконечно малому интервалу *dx*:

$$f(x)dx = P(a < X \le a + dx),$$

и проинтегрируем по конечному интервалу от *a* до *b*:

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{2.38}$$

получим точное значение вероятности попадания случайной величины *X* в этот интервал.

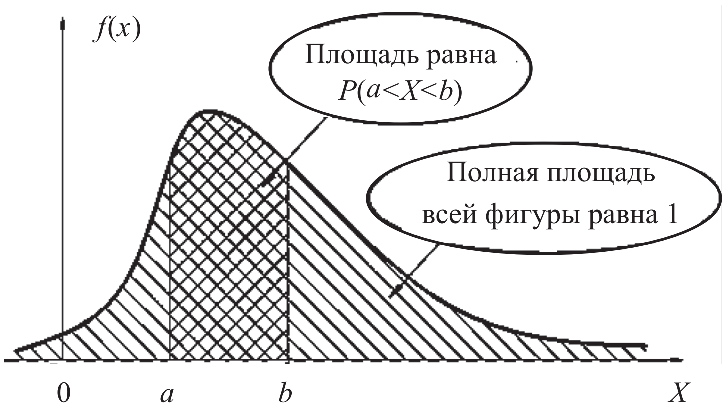


Рис. 2.37. Вероятностный смысл графика плотности распределения

Геометрический смысл интеграла (2.38) — площадь фигуры, расположенной под кривой плотности распределения *f*(*x*) и ограниченной осью абсцисс и вертикалями *a* и *b*.

Такой геометрический смысл выражения (2.38) можно использовать для расчета вероятности попадания значения случайной величины в интересующий диапазон значений. При этом следует учитывать, что полная площадь всей фигуры, расположенной под всей кривой плотности распределения, равна полной вероятности попадания случайной величины X в диапазон значений от $-\infty$ до $+\infty$ и равна 1.

Расчет вероятности с использованием графического представления плотности распределения

При известном графике плотности распределения (например, эмпирическом графике, построенном по алгоритму, приведенному в подглаве 2.3), вероятность попадания значения случайной величины в интервал от a до b (см. формулу (2.38)) можно подсчитать так:

- в любых удобных единицах площади (мм^2, in^2, одинаковые клеточки, одинаковые треугольники и т. д.) определить полную площадь фигуры, расположенной под всей кривой плотности распределения ω_Σ;
- в тех же единицах площади определить площадь фигуры под частью кривой, ограниченной вертикалями, проведенными через границы рассматриваемого диапазона значений a и b, — $\omega_д$;
- подсчитать значение интересующей вероятности как отношение определенных выше площадей фигур

$$P\left(a < X \le b\right) = \frac{\omega_д}{\omega_\Sigma}.$$

В качестве границ интервалов a и b могут выступать значения $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Расчет вероятности с использованием аналитической формы задания плотности распределения

При наличии формулы для расчета плотности распределения $f(x)$ исследуемой случайной величины X (например, формул, приведенных в подглаве 2.2) вероятность попадания значения случайной величины X в интервал от a до b можно подсчитать путем расчета численного значения определенного интеграла плотности распределения $f(x)$ с границами интегрирования a и b согласно выражению (2.38). Конечно, если для расчета вероятности используется параметрический теоретический закон распределения, то необходимо чтобы были известны или предварительно оценены по опытным данным числовые значения параметров этого распределения.

Для значительного количества известных теоретических распределений выражение для интеграла от плотности распределения $f(x)$ известно и представляет собой не что иное, как функцию распределения $F(x)$. В этом случае потребности в расчете интегралов нет и можно воспользоваться методологией, изложенной в п. 2.7.2 для функции распределения.

В ряде случаев аналитическое выражение, описывающее кривую плотности распределения $f(x)$, имеет достаточно сложный или специфический вид и может оказаться, что прямое взятие интеграла от $f(x)$ или невозможно в конечных разностях (как, например, для нормального закона распределения), или сопряжено со значительными математическими затруднениями. В этом случае численное значение определенного интеграла (2.38) может быть рассчитано различными способами (разложение функции $f(x)$ в ряд, замена функции $f(x)$ более простым приближенным выражением и т. д.). Но в условиях реальной практики обычно более простым путем расчета определенного интеграла является численный, конечно-разностный метод, идеология которого изложена в следующем пункте.

Расчет вероятности с использованием табличной формы задания плотности распределения

Для расчета вероятности попадания значения случайной величины X в интервал от a до b табличным способом задания плотности распределения $f(x)$ интеграл (2.38) можно рассчитать приближенно, заменив его суммой, например, в такой последовательности:

- установить шаг табулирования Δx функции плотности распределения $f(x)$, принятый в таблице используемого теоретического распределения;
- определить количество N внутренних табличных интервалов Δx, входящих в интересующий диапазон значений от a до b. Для каждого такого i-го интервала выбрать из таблицы значения плотности распределения f_i на левых границах интервала f_{N+1} до правой границы последнего N-го интервала;

- при несовпадении границ диапазона a и b с табличными значениями случайной величины X рассчитать значения Δx_0 и $\Delta x_{N=1}$ на первом интервале изменения случайной величины. Используя метод линейной интерполяции, определить значения плотности распределения $f_0 = f(a)$ и $f_{N+2} = f(b)$ для границ a и b рассматриваемого диапазона;
- рассчитать вероятность обнаружения значения случайной величины X в интересующем диапазоне от a до b по формуле

$$P\left(a < X \le b\right) \approx \sum_{i=0}^{N+1} \frac{(f_{i-1} + f_i)}{2} \Delta x_i,$$

где для i-го интервала в диапазоне от a до b f_{i-1} и f_i — значения плотности распределения для левой и правой границ, Δx_i — ширина i-го интервала.

Аналогичным образом приближенно, пошагово можно рассчитать вероятность попадания случайной величины в любой диапазон значений, используя возможности определения значения плотности распределения $f(x)$ в ряде компьютерных программ. Например, в Excel версии 2007 для ряда функций, перечисленных на с. 64, возможно определение как функции распределения $F(x)$, так и плотности распределения $f(x)$. В Excel 2007, в отличие от стандартизованных в ГОСТе терминов, функцию распределения $F(x)$ обозначают понятием «интегральная функция распределения», а плотности распределения $f(x)$ — понятием «весовая функция распределения». Для выбора расчета функции распределения $F(x)$ (интегральная функция распределения) в соответствующем поле формы установки параметров расчета соответствующей статистической функции Excel 2007 необходимо ввести «ИСТИНА» или «1», а для выбора плотности распределения $f(x)$ (весовая функция распределения) — «ЛОЖЬ» или «0».

3. Статистическое оценивание

3.1. Генеральная совокупность и выборка

В подавляющем большинстве случаев реальной практики для вновь изучаемой случайной величины не известен вид закона распределения вероятности этой случайной величины или, как минимум, не известны численные значения параметров ее распределения. Чаще всего неизвестными являются и значения числовых характеристик изучаемой случайной величины. Для использования такой случайной величины всё перечисленное подлежит экспериментальному определению.

Для того чтобы выявить *точный* вид закона распределения вероятности изучаемой случайной величины и определить точные значения параметров ее распределения или точные значения ее числовых характеристик, необходимо произвести обследование так называемой «генеральной совокупности» опытных данных.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **генеральная совокупность (**population) — множество всех рассматриваемых единиц.

Примечание из ГОСТа: для случайной величины распределение вероятностей рассматривают как определение генеральной совокупности этой случайной величины.

В примечании речь идет об известном математически описанном законе распределения вероятности, т. е. о законе распределения, для которого однозначно сформулирована функция распределения и (или) плотность распределения (в виде соответствующих графиков, таблиц или аналитических выражений).

Для более конкретного понимания термина «генеральная совокупность» можно использовать и другое более подробное определение.

Генеральной совокупностью называют гипотетическое, воображаемое множество всех результатов испытаний, которые *принципиально* могут быть получены при данных, конкретных условиях проведения эксперимента.

Генеральная совокупность может существовать в одном из двух вариантов:

- бесконечно большое множество значений случайной величины (например, в случае измерения линейных размеров некоторого объекта, количество измерений принципиально может быть бесконечным);
- ограниченное, конечное множество (например, в случае испытаний объектов исследования, приводящих к их разрушению, когда количество таких объектов в реальности ограничено).

Но и в том и в другом случае важной объединяющей терминообразующей особенностью понятия «генеральная совокупность» является то, что в такую совокупность должны быть включены именно все результаты принципиально возможных испытаний. Причем неважно, получены они реально или только принципиально возможны для получения в данных, конкретных условиях проведения эксперимента.

В подавляющем большинстве случаев реальной практики, реального эксперимента, получить генеральную совокупность результатов эксперимента невозможно, причем в большинстве практических случаев получение такой совокупности бесполезно и даже абсурдно. В этом смысле понятие «генеральная совокупность» является математической, сугубо теоретической абстракцией, аналогичной по сути многим математическим абстракциям, таким как, например, «бесконечность» или «бесконечно малая величина», «точка», «нулевая толщина линии» и т. п.

На практике обычно имеется возможность провести только ограниченное число опытов, испытаний, измерений, обследовать, таким образом, лишь некоторую часть генеральной совокупности. Единичный результат, получаемый в ходе проведения одного опыта, обычно называют «выборочная единица», а несколько таких единиц в совокупности называют «выборка».

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **выборочная единица** (sampling unit) — одна из конкретных единиц, из которых состоит генеральная совокупность; определенное количество продукции, материала или услуг, образующее единство и взятое из одного места, в одно время для формирования части выборки.

Выборочная единица может содержать более одного изделия, допускающего испытание, например партия однотипного металла, но при этом получают один результат испытания или наблюдения для всей этой партии. Единицей продукции может быть и определенное количество материала, такое как отрезок латунного прутка определенной длины, определенный объем жидкой краски или заданная масса угля.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **выборка** (sample) — одна или несколько выборочных единиц, взятых из генеральной совокупности и предназначенных для получения информации о ней.

Примечание из ГОСТа: выборка может служить основой для принятия решения о генеральной совокупности или о процессе, который ее формирует.

По ГОСТ 15895–77 **выборка** — любое конечное подмножество генеральной совокупности, предназначенное для непосредственных исследований.

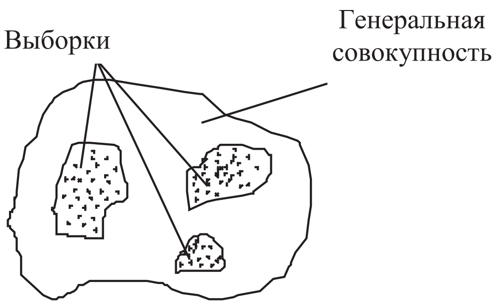


Рис. 3.1. Генеральная совокупность и выборка

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **объем выборки** (sample size) — число выборочных единиц в выборке.

Объем выборки N является одной из главных характеристик выборки, т. к. в значительной степени предопределяет результат эксперимента. Поэтому проблема выбора, определения, расчета объема выборки N является одной из наиболее важных при решении большинства задач экспериментального исследования. Практически всегда в реальных условиях проведения эксперимента существует две разнонаправленных тенденции: 1) стремление увеличить объем выборки (а значит, и эксперимента) в целях получения более точных, надежных, достоверных результатов; 2) стремление уменьшить объем выборки в целях сокращения разного рода затрат на эксперимент — времени, работы, материальных средств и т. п. Таким образом, имеется задача, в которой одна переменная N (объем выборки) является одновременно аргументом функции $F_1(N)$, которая характеризует точность, надежность, достоверность и т. п., а также функции $F_2(N)$, которая характеризует затраты на эксперимент. В обоих случаях функциональная зависимость положительная (рост N приводит и к увеличению $F_1(N)$, и к увеличению $F_2(N)$). При этом желательно, чтобы функция $F_1(N)$ (характеризует точность) принимала наибольшие значения, а функция $F_2(N)$ (характеризует затраты) принимала наименьшие значения. Понятно, что при прямой положительной зависимости функций F_2 и F_1 от N удовлетворить одновременно эти две цели невозможно. Поэтому используют один из трех подходов:

- задаются некоторым требуемым пороговым, предельным значением точности или достоверности (это не одно и то же и требует разных подходов) и исходя из этого определяют N;
- ограничивают N путем установления некоторых предельных затрат на эксперимент;
- используют специальные процедуры, позволяющие при заданной точности уменьшить объем эксперимента (а значит, и затраты) или повысить точность конечного результата при заданном объеме эксперимента. Установление таких процедур рассматривается в специальном разделе теории эксперимента, называемом «Планирование эксперимента».

При сопоставлении понятий «генеральная совокупность» и «выборка» важно отметить следующее:

- в данных, конкретных условиях проведения эксперимента принципиально возможно получить лишь одну генеральную совокупность;
- из одной генеральной совокупности можно получить (извлечь) большое, причем в большинстве случаев бесконечно большое количество выборок разного объема (меньшего, чем размер генеральной совокупности);
- состав и объем генеральной совокупности предопределен, детерминирован только конкретными условиями проведения эксперимента (включая в эти условия и сами свойства изучаемого объекта или явления);
- состав выборки случаен, т. к. при изучении случайной величины конкретные числовые значения результатов измерений в каждом из опытов получаются случайно и поэтому случайно попадают в выборку;

- объем генеральной совокупности по определению объективен, т. к. определяется лишь только конкретными условиями проведения эксперимента и не зависит от воли исследователя (по определению или бесконечен, или конечен, но включает все возможные измерения);
- объем выборки определяется исследователем субъективно, т. к. принципиально нет условий, или ограничений, или каких-то других обстоятельств, объективно определяющих необходимый объем исследований. Конечно, для снижения субъективности можно заранее сформулировать некоторые правила определения объемов выборок, но нет объективных подходов к формулировке таких правил, т. е. правила будут также субъективны, о чем указывалось выше, когда рассматривались разные подходы к определению объема выборки.

3.2. Оценка. Требования к оценкам. Типы оценок

Допустим, известна генеральная совокупность (X) некоторой случайной величины X (например, известен закон распределения вероятности для этой случайной величины в виде аналитически описанной функции плотности распределения $f(x)$). Используя данные генеральной совокупности (X), можно рассчитать любые числовые характеристики случайной величины X, например рассмотренное выше математическое ожидание μ по выражению (2.29) или генеральную дисперсию (2.31).

Пусть из генеральной совокупности (X) взято ограниченное число выборок $[X_1]$, $[X_2]$, ..., $[X_k]$ объемами N_1, N_2, ..., N_k соответственно. Используя некоторые математические выражения, аналогичные по назначению тем, которые были использованы при расчете числовых характеристик для генеральной совокупности, по данным этих выборок можно рассчитать аналогичные числовые характеристики, например, $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, ..., $\hat{\mu}_k$ (символ ^ означает, что величина рассчитана по выборке, рис. 3.2).

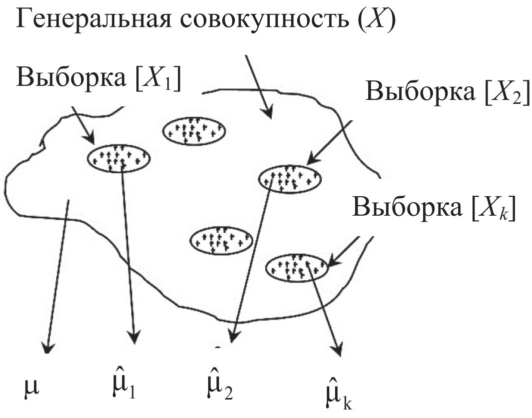


Рис. 3.2. Генеральные и выборочные числовые характеристики

Далее приведем следующие понятия (определения) для основных характеристик.

Генеральная величина — любая величина (числовая характеристика, параметр распределения и т. п.), рассчитанная с использованием всех данных генеральной совокупности.

Рассмотренные выше параметры теоретических распределений и основные числовые характеристики (μ, σ^2 и σ) в соответствии со своими определениями являются именно генеральными величинами, поэтому их полными названиями являются:

- μ — математическое ожидание (слово «генеральное» здесь не добавляют),
- σ^2 — генеральная дисперсия;
- σ — генеральное стандартное отклонение.

Выборочная величина — любая величина (числовая характеристика, параметр распределения и т. п.), рассчитанная с использованием какой-то (любой) выборки ограниченного объема.

Определенные выше (рис. 3.2) величины $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, ..., $\hat{\mu}_k$ являются выборочными, т. к. определены с использованием выборок.

Если начать сравнивать генеральные величины, рассчитанные с использованием генеральной совокупности (X) с аналогичными величинами, рассчитанными на основе выборок [X_1], [X_2], ..., [X_k] (например, математическое ожидание μ и его выборочные аналоги для разных выборок $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, ..., $\hat{\mu}_k$), то окажется, что эти значения будут отличаться, причем отличаться тем больше, чем больше разница в объемах генеральной совокупности и выборки. Кроме того, и однотипные выборочные величины, рассчитанные с использованием разных выборок $[X_1]$, $[X_2]$, ..., $[X_k]$, взятых из одной и той же генеральной совокупности (X) (например, $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, ..., $\hat{\mu}_k$), также будут отличаться между собой по числовым значениям. Такое различие в числовых значениях генеральных и выборочных числовых величин вполне закономерно и объясняется следующими их принципиальными отличиями:

- *генеральные числовые характеристики* (например, μ) имеют точные, строго и однозначно определенные, т. е. *детерминированные значения*, т. к. для их определения использованы все принципиально возможные опытные данные и получить какие-либо другие значения просто невозможно;
- *выборочные числовые характеристики* (например, $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, ..., $\hat{\mu}_k$ или $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, ..., $\hat{\sigma}_k^2$) будут существенно зависеть от состава и объема выборки, а поскольку состав и объем выборки обычно определяется некоторым случайным образом, то и рассчитанные по выборке величины также будут иметь случайные значения, т. е. выборочные числовые характеристики случайной величины сами, по своей сути, *являются случайными величинами*;
- объем и состав генеральной совокупности однозначны (все принципиально возможные опытные значения) и не зависят от воли исследователя, т. е. объективны, поэтому и величины, рассчитанные с использованием генеральной совокупности, т. е. *генеральные величины, являются объективными величинами*;
- объем же и состав выборки определяет исследователь, причем субъективно, основываясь на своих представлениях о величине необходимой точности, степени ответственности эксперимента, допустимых затратах на эксперимент и т. п., поэтому и *выборочные величины* также *носят субъективный характер*.

Разница в генеральных и выборочных характеристиках является принципиальной и, в частности, выражается в том, что величины, рассчитанные по выборке, являются некоторым *приближением* точных значений генеральных характеристик или *«оценками»* этих значений. Точность приближения (оценивания) зависит от количества испытаний N и воли случая, т. к. каждая выборка формируется случайным образом, имеет случайный состав, и поэтому точность оценки также является величиной случайной.

Часто выборочные характеристики случайной величины называют *статистиками*, понимая под этим термином числовые значения или величины, рассчитанные с использованием опытных данных.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **статистика** (statistics) — функция от выборочных значений.

Примечание из ГОСТа: статистика как функция от выборочных значений — случайная величина, которая может принимать различные значения от выборки к выборке. Значение статистики, получаемое при использовании наблюдаемых значений, как их функция, может быть использовано при проверке статистических гипотез или как оценка параметра совокупности, например, среднего арифметического или стандартного отклонения.

По ГОСТ 15895–77 **статистика** — функция результатов наблюдений, используемая для оценки параметров распределения и (или) для проверки статистических гипотез.

Наряду с термином «статистика» широко используют термин «порядковая статистика». Между этими близкими по звучанию понятиями существует значительная разница.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **порядковая статистика** (order statistics) — каждое из упорядоченных выборочных значений, расположенных в неубывающем порядке.

Примечание из ГОСТа: в более общем выражении всякую статистику, основанную на порядковых статистиках в этом узком смысле, также называют порядковой статистикой.

Смысл всех статистических методов, применяемых в настоящее время, заключается в том, чтобы по выборке ограниченного объема (т. е. по некоторой части генеральной совокупности) получить *обоснованное*, *максимально объективное и точное* суждение о свойствах генеральной совокупности в целом.

С учетом такого смысла статистических методов целью «теоретической статистики» как раздела математической науки является разработка таких математических методов, которые позволили бы получать максимально объективные и максимально точные выводы, основываясь на минимальном объеме экспериментальной информации (на выборках минимально возможного объема в целях сокращения затрат на эксперимент).

Пожалуй, наиболее важными статистическими процедурами и наиболее широко используемыми статистическими методами являются процедуры *оценивания*, позволяющие произвести построение и расчет *оценок* для неизвестных генеральных величин, таких как генеральные числовых характеристик случайной величины, генеральные параметры распределения и т. п. В дальнейшем оценки могут быть использованы для разных целей статистического анализа, но на начальной стадии исследования необходимо получить (рассчитать) эти оценки.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **оценивание (параметра)** (estimation) — операция определения на основе выборочных данных числовых значений параметров распределения, принятого в качестве статистической модели генеральной совокупности, из которой извлечена выборка.

Примечание из ГОСТа: результат этой операции может быть выражен как одним числовым значением, так и доверительным интервалом.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **оценка** (estimator) — статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **значение оценки** (estimateur) — значение параметра, полученное в результате оценивания.

Известны и другие определения для этих понятий, приведенные в ранее действовавших ГОСТах и другой технической литературе.

По ГОСТ 15895–77 **оценивание** — это определение приближенного значения неизвестного параметра генеральной совокупности по результатам наблюдений.

По ГОСТ 15895–77 **оценкой** называется статистика, являющаяся основой для оценивания неизвестного параметра распределения.

Кроме того, с термином «оценка» связаны следующие понятия, определенные в ГОСТ.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **погрешность оценки** (estimator error) — разность ($T - \theta$) при оценивании параметра, где T обозначает результат оценки, а θ — оцениваемый параметр.

Примечание из ГОСТа: погрешность при оценивании может включать в себя один или несколько из следующих компонентов: погрешность выборочного метода; погрешность измерения; округление значений или разделение на классы; другие погрешности.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **погрешность выборочного метода** (sampling error) — часть погрешности при оценивании, обусловленная только тем, что объем выборки меньше, чем объем генеральной совокупности.

Для оценивания одного и того же параметра распределения случайной величины можно использовать различные оценки, отражающие одно и то же свойство случайной величины, но рассчитываемые по разным формулам или разным алгоритмам. В результате будем получать несколько отличающиеся численные значения для таких разных оценок.

Пример. Пусть мы имеем некоторую выборку $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ случайной величины X с соответствующими значениями 6,13; 6,00; 5,96; 5,94; 5,91; 5,75; 5,69; 5,67; 5,46; 5,30. Стоит задача оценить математическое ожидание этой случайной величины.

Математическое ожидание (см. формулу (2.29)) — это объективная характеристика центра распределения генеральной совокупности случайной величины (средневзвешенное по вероятности значение случайной величины). Поэтому и выборочный аналог (оценка) должен также описывать среднее значение, но рассчитываться оценка должна с использованием опытных данных из выборки. Непосредственно использовать интегральное выражение математического ожидания для непрерывной функции (2.29) и подставлять туда отдельные дискретные значения из приведенной выборки нельзя. Нужно использовать какие-то другие формулы, но с аналогичным смыслом.

Математическое ожидание в литературе называют также «генеральным средним», что правильно отражает его суть (правда, не полностью), поэтому для оценивания можно использовать много различных величин, каждая из которых будет характеризовать среднее, например, следующие величины (указанные числовые значения оценок рассчитаны по приведенной выше выборке):

- среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 5{,}78;$
- среднее по интервалу $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = \frac{5{,}30 + 6{,}13}{2} = 5{,}72;$
- центральный момент

$$Me(x_i) = \begin{cases} x_m, & N - \text{нечетное}, \quad N = 2m - 1; \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, & N - \text{четное}, \quad N = 2m; \end{cases}$$

$$Me(x_i) = \frac{5{,}91 + 5{,}75}{2} = 5{,}83;$$

- среднее геометрическое $\bar{\bar{x}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} = 5{,}78;$
- среднее гармоническое $\bar{\bar{\bar{x}}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}} = 5{,}77.$

Известно и можно придумать еще много формул для расчета аналогичных по смыслу величин, каждая из которых как-то по-своему будет определять среднее. Важно отметить, что в большинстве случаев, производя расчет по данным одной и той же выборки по разным формулам, будем получать хотя и близкие (как, например, рассчитанные выше значения 5,78; 5,71; 5,83; 5,87 и 5,77), но все же разные результаты. Возникает вопрос: какая из возможных оценок (какая из этих и других формул) лучше описывает математическое ожидание?

Для однозначного выбора наилучшей из возможных оценок сформулированы совершенно определенные требования к их свойствам, важные с точки зрения практики оценивания и назначения оценки. Такими требованиями являются: *состоятельность*, *несмещенность*, *эффективность*. (В некоторых учебниках и книгах по математической статистике, например [12], приводят еще одно требование — *достаточность,* но в ГОСТах это требование не определено, да и формализовать его трудно).

По ГОСТ 15895—77 **состоятельная оценка** — это оценка, сходящаяся по величине к значению оцениваемого параметра при безграничном возрастании объема выборки.

Иными словами, при увеличении объема выборки $N \to \infty$ оценка $\hat{\theta}$ должна приближаться к оцениваемой генеральной характеристике θ: $\hat{\theta} \to \theta$.

Состоятельность оценки гарантирует исследователю увеличение точности оценивания с ростом N и то, что хотя бы в пределе $[N; \infty]$, при $N \to \infty$, оценка может получить точное значение θ.

По ГОСТ 15895—77 **несмещенная оценка** — оценка, математическое ожидание которой равно значению оцениваемого параметра.

Для несмещенной оценки характерно, что для любого объема выборки $N \mu_{\hat{\theta}} = \theta$. С практической точки зрения, несмещенность оценки означает отсутствие систематической погрешности при оценивании параметров.

В ГОСТ Р 50779.10—2000 требование несмещенности определено по-другому, в виде двух определений:

- **смещение оценки** (bias of estimator) — разность между математическим ожиданием оценки и значением оцениваемого параметра;
- **несмещенная оценка** (unbiased estimator) — оценка со смещением равным нулю.

По ГОСТ 15895–77 **эффективная оценка** — это несмещенная оценка, имеющая наименьшую дисперсию из всех возможных несмещенных оценок данного параметра.

Эффективная оценка, следовательно, имеет минимальную случайную ошибку и в этом смысле наиболее точная. С практической точки зрения эффективность оценки означает, что, используя разные выборки, мы будем получать числовые значения оценки с малым разбросом, с малой дисперсией.

Различают и используют два типа оценок генеральных параметров случайной величины: точечные и интервальные оценки.

Точечные и интервальные оценки получают в результате проведения соответствующих процедур оценивания.

По ГОСТ 15895–77 **точечное оценивание** — способ оценивания, заключающийся в том, что значение оценки принимается как неизвестное значение параметра распределения.

Точечную оценку геометрически можно представить в виде точки на числовой оси оцениваемого генерального параметра случайной величины, в виде точки, расположенной вблизи другой, заранее неизвестной точки, отражающей истинное значение этого параметра.

По ГОСТ 15895–77 **оценивание с помощью доверительного интервала (интервальное оценивание)** — способ оценки, при котором с заданной доверительной вероятностью устанавливают границы доверительного интервала.

Интервальные оценки можно представить в виде некоторого интервала значений, который накрывает неизвестное оцениваемое значение с заданной вероятностью.

Рассмотрим эти два типа оценок отдельно применительно к оцениванию выделенных нами выше основных генеральных числовых характеристик.

3.3. Точечные оценки

Точечные оценки получают в результате проведения процедуры точечного оценивания. Для основных генеральных числовых характеристик данная процедура подробно описана в ГОСТ Р 50779.21–2004 [7].

По ГОСТ 50779.21–2004 **точечное оценивание параметра** — получение оценки параметра в виде одного численного значения.

Для более широкого понятия «точечная оценка» можно дать следующее определение, подходящее не только для рассматриваемых в настоящее время одномерных случайных величин, но и для более общего случая — многомерных случайных величин.

Точечная оценка — статистика (функция от выборочных опытных данных), предназначенная для установления приблизительного значения оцениваемого параметра в виде точки в координатном пространстве этого параметра.

Для одномерного параметра одномерного распределения точечная оценка — конкретное число, которое можно отложить в виде точки на оси значений оцениваемого параметра. Для двумерного параметра распределения точечная оценка — связанная пара конкретных чисел, определяющая две координаты точки в двумерном пространстве этого параметра, и т. д.

Как показано выше в примере, для одних и тех же параметров распределений и числовых характеристик оценки можно находить разными методами, используя различные выборочные параметры и характеристики, аналогичные по смыслу оцениваемым. Но в дальнейшем, по умолчанию, мы будем рассматривать лишь «наилучшие» оценки, т. е. оценки, удовлетворяющие свойствам эффективности, состоятельности и несмещенности, причем полученные на основе метода максимального правдоподобия.

Для основных числовых характеристик случайной величины *наилучшими точечными оценками являются*:

- для математического ожидания μ выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$;
- для генеральной дисперсии σ^2 выборочная дисперсия s^2;
- для генерального среднеквадратического отклонения σ выборочное среднеквадратическое отклонение s.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **среднее арифметическое** (arithmetic mean) — сумма значений, деленная на их число:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i . \qquad (3.1)$$

В литературе среднее арифметическое часто называют также выборочным средним арифметическим или просто выборочным средним.

Если случайная величина X распределена нормально, то и ее среднее арифметическое $\bar{x}$ также распределено нормально со следующими параметрами распределения:

- математическое ожидание среднего арифметического равно математическому ожиданию оцениваемой случайной величины X: $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$;
- дисперсия среднего арифметического меньше соответствующей дисперсии случайной величины $\sigma_x{}^2$ в N раз (N — объем выборки, по которой произведен расчет оценки): $\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \dfrac{\sigma_x{}^2}{N}$.

Для выборок малого объема ($N < 10$) в целях стабилизации оценки в районе группирования опытных данных (для повышения эффективности) вместо среднего арифметического (3.1) в [13] рекомендуют применять модифицированную оценку в виде

$$\bar{x}^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{d_i \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i}},$$

где $d_i = \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - x_i\right)^2$.

Для выборок большого объема известно несколько других видов оценок математического ожидания [12, 15, 16], часть из которых близка по эффективности к оценке среднего арифметического, но требуют меньше расчетов, однако в ГОСТ Р 50779.10–2000 и ГОСТ Р 50779.21–2004 оговорено применение в качестве оценки математического ожидания именно среднего арифметического (3.1).

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **выборочная дисперсия (**sampling variance) — одна из мер рассеяния, представляющая собой сумму квадратов отклонений наблюдений от их среднего арифметического, деленная на число наблюдений минус единица:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i-1}^{N} (x_i - \bar{x})^2. \qquad (3.2)$$

Примечание из ГОСТ Р 50779.10–2000: выборочная дисперсия — это несмещенная оценка дисперсии совокупности; выборочная дисперсия — это центральный момент второго порядка, кратный $N/(N - 1)$.

Формулу (3.2) можно преобразовать к одному из видов, более удобных для практических расчетов на калькуляторе:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right] \tag{3.3}$$

или

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - N\left(\bar{x}\right)^2\right]. \tag{3.4}$$

При сравнении выражений (3.1) и (3.2) обращает на себя внимание факт деления на (N— 1) в выражении (3.2) вместо очевидного, казалось бы, деления на объем выборки N, как при расчете среднего арифметического (3.1). Это связано с тем, что деление именно на (N— 1) позволяет придать оценке дисперсии s^2 свойство несмещенности. При этом сама величина (N— 1) по своей сути (и по назначению) является величиной, называемой в большинстве математической литературы «число степеней свободы», или в соответствии с ГОСТ Р 50779.10–2000 — «степень свободы».

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **степень свободы** (degree of freedom) — в общем случае число слагаемых минус число ограничений, налагаемых на них.

Часто степень свободы обозначают буквой ν.

Для выборочной дисперсии s^2, рассчитываемой по выражению (3.2), $\nu = N - 1$. Разберемся, почему это именно так. Число слагаемых в выражении (3.2) равно объему имеющейся выборки N, т. е. равно числу опытных данных x_i ($i = 1, 2, \ldots, N$). По этим же опытным данным x_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) ранее рассчитано среднее арифметическое $\bar{x}$ (см. формулу (3.1)), которое используется в выражении для расчета дисперсии s^2 (3.2). Поэтому при расчете s^2 опытные данные x_i уже связаны выражением среднего арифметического $\bar{x}$ (3.1), т. е. на массив x_i уже наложена связь в виде $\bar{x}$ или, другими словами, наложено одно ограничение $\bar{x}$.

Учитывая такую трактовку, применительно к опытным данным, можно дать другое определение степени свободы.

Степень свободы — это разность между числом используемых выборочных экспериментальных значений (объемом выборки N), по которым вычисляется величина, и количеством дополнительных параметров, входящих в формулу для расчета этой величины и уже вычисленных по тем же самым опытным значениям.

При оценке дисперсии по выражению (3.2) в нем используется выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$, определяемое по выражению (3.1) с использованием тех же опытных значений. Именно поэтому в выражении (3.2) в качестве степени свободы следует использовать $\nu = N - 1$.

Однако существуют две ситуации, когда в качестве степени свободы ν при расчете несмещенной выборочной дисперсии следует использовать не $\nu = N - 1$, а $\nu = N$. Во-первых, это — ситуация расчета выборочной дисперсии при известном значении математического ожидания μ. Поскольку математическое ожидание μ является генеральной величиной, то при условии, что μ известно, нет необходимости и целесообразности производить расчет его оценки $\bar{x}$ (приближенного значения). И, во-вторых, это — ситуация, когда при расчете выборочной дисперсии s^2 используется среднее арифметическое $\bar{x}$, известное заранее, например рассчитанное ранее по другим опытным данным. В обоих этих случаях на опытные данные дополнительная связь в виде $\bar{x}$ не накладывается, а значит, и степень свободы имеющейся выборки не уменьшается.

При использовании выборок большого объема (в ряде случаев, при отсутствии потребности в высокой точности, уже при $N > 30$) различие между величинами выборочных дисперсий s^2, рассчитанными с использованием в знаменателе $\nu = N - 1$ и $\nu = N$, становится весьма малым. Например, разница межу $\dfrac{a}{30}$ и $\dfrac{a}{31}$ составляет примерно 0,1 % от величины a. Поэтому при выборках большого объема в литературе в качестве знаменателя довольно часто используют объем выборки N, однако при этом следует иметь в виду, что в ГОСТ Р 50779.10–2000 и ГОСТ Р 50779.21–2004 оговорено применение в качестве оценки генеральной дисперсии выражения (3.2), в котором использована степень свободы $\nu = N - 1$.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **выборочное стандартное отклонение** (sampling standard deviation) — положительный квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$s = \sqrt{s^2}. \qquad (3.5)$$

Примечание из ГОСТ Р 50779.10–2000: выборочное стандартное отклонение — это смещенная оценка стандартного отклонения совокупности.

Несмещенной оценкой для генерального стандартного отклонения [14] является величина

$$s^H = \frac{s}{\lambda},$$

где s — смещенное стандартное отклонение (3.5). Для упрощения расчета по данной формуле используем выражение $\lambda = \sqrt{\frac{N-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$, где $\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$ — гамма-функция (2.22).

При $N > 30$ для расчета λ можно использовать аппроксимирующее выражение $\lambda = 1 - \frac{2}{8N+1}$. Рассчитанные значения величины λ для малых объемов выборок (когда λ оказывает наиболее влияющие на значения $s^{н}$) приведены в таблице ниже.

Коэффициент λ для расчета несмещенного стандартного отклонения $s^{н}$ для выборки объемом n [15]

n	λ	n	λ	n	λ	n	λ	n	λ
1	0,7979	6	0,9594	11	0,9776	16	0,9845	25	0,9900
2	0,8862	7	0,9650	12	0,9794	17	0,9540	30	0,9917
3	0,9213	8	0,9693	13	0,9810	18	0,9862	35	0,9929
4	0,9400	9	0,9727	14	0,9823	19	0,9869	40	0,9938
5	0,9515	10	0,9753	15	0,9835	20	0,9876	45	0,9945

Из таблицы видно, что коэффициент λ оказывает заметное влияние на величину только при выборках очень малого объема. При $N \geq 10$ использование коэффициента λ приводит к возникновению отклонения не более 2,5 %, а при $N > 25$ — менее 1 %. Кроме того, следует иметь в виду, что в ГОСТ Р 50779.10–2000 и ГОСТ Р 50779.21–2004 оговорено применение в качестве оценки генерального стандартного отклонения выражения (3.5), т. е. без использования коэффициента λ.

3.4. Интервальные оценки

Существенным недостатком рассмотренных выше точечных оценок $\widehat{\Theta}$ любого неизвестного параметра Θ случайной величины X является то, что такие $\widehat{\Theta}$ не содержат в себе информации о степени близости $\widehat{\Theta}$ к оцениваемому параметру Θ. Неизвестно, да и принципиально не может быть известно, насколько «близко» находится значение оценки $\widehat{\Theta}$ к истинному неизвестному значению оцениваемого параметра Θ. Другими словами, неизвестно и не может быть известно, насколько точно производится оценка (каково их отличие $\Delta\Theta = \widehat{\Theta} - \Theta$). Конечно, использование «наилучших» точечных оценок (эффективных, состоятельных и несмещенных, см. введение) в заданной степени определяет то, что различие между $\widehat{\Theta}$ и Θ будет «небольшим». Но конкретного числового смысла в понятии «небольшое различие» нет. Для устранения этого недостатка предназначены процедуры интервального оценивания.

Можно сформулировать следующую цель интервальной оценки — определить точность оценки в виде конкретного числа. Это можно сделать двумя путями, имеющими один и тот же конечный смысл:

- определить точечную оценку $\widehat{\Theta}$ интересующего нас параметра Θ и указать величины возможных отклонений между $\widehat{\Theta}$ и Θ «в плюс» и «в минус», т. е. получить оценку в виде $\widehat{\Theta}^{+\Delta_{\text{Пр}}}_{-\Delta_{\text{Лев}}}$, как это часто используется при техническом определении точности;
- указать в явном виде границы интервала, который содержит оцениваемый параметр Θ, т. е. представить интервальную оценку в виде пары чисел $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}} = \widehat{\Theta} - \Delta_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}} = \widehat{\Theta} - \Delta_{\text{Пр}}$, каждое из которых устанавливает левую и правую границы этой оценки. Из этих двух вариантов представления интервальной оценки при статистическом анализе чаще используют второй вид, поэтому будем рассматривать все процедуры построения интервальных оценок именно в таком виде. Зная точечную оценку $\widehat{\Theta}$, при необходимости можно легко перейти и к первому виду представления точечной оценки.

Пусть необходимо построить интервальную оценку для некоторого генерального параметра распределения Θ случайной величины X. Численное значение параметра распределения Θ неизвестно (в противном случае, при известном значении Θ, нет никакого смысла находить его приближенные значения — оценки), а значит, числовое значение параметра Θ может находиться в любом месте области своих возможных значений. В наиболее общем случае областью возможных значений Θ является область с границами от $-\infty$ до $+\infty$. А это значит, что если не вводить дополнительных ограничений, то за интервальную оценку параметра Θ следует принять интервал $[-\infty; +\infty]$. Но такая оценка никому не нужна и не имеет смысла. Необходимо сузить интервал $[-\infty; +\infty]$ до некоторых конечных размеров $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]$. Причем желательно, чтобы ширина этого интервала $L = \widehat{\Theta}_{\text{Пр}} - \widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ была бы минимальна, т. к. именно величина L и определяет точность оценки.

Однако при сужении интервальной оценки от интервала области возможных значений $[-\infty; +\infty]$ до конечной величины $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]$ возникают левая $[-\infty; \widehat{\Theta}_{\text{Лев}}]$ и правая $[\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}; +\infty]$ области неопределенности, которые также принципиально могут содержать неизвестное оцениваемое значение Θ. Если имеется возможность оценить вероятность нахождения истинного значения Θ в каждом из выделенных интервалов ($[-\infty; \widehat{\Theta}_{\text{Лев}}]$, $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]$ и $[\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}; +\infty]$), а для этого можно использовать закон распределения $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$, то, назначив некоторое конкретное значение вероятности p обнаружения Θ в интервале $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]$, $p = P\left(\widehat{\Theta}_{\text{Лев}} < \Theta < \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}\right)$, удастся определить числовые величины границ $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}$. Назначенная величина вероятности p характеризует степень уверенности в том, что интервал $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]$ действительно накроет оцениваемый параметр Θ (будет содержать в себе истинное численное значение Θ). Вероятность p характеризует степень доверия к полученному результату, и поэтому величину p называют «доверительная вероятность». Границы интервала $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}$ называют доверительными границами, а сам интервал $[\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}; \widehat{\Theta}_{\text{Пр}}]]$ называют интервальной оценкой, определенной в виде доверительного интервала.

По ГОСТ 50779.21–2004 **интервальное (доверительное) оценивание параметра** — получение оценки параметра в виде одного доверительного интервала.

Непосредственная процедура интервального оценивания подробно описана в данном ГОСТе [7], при этом используют понятия, приведенные ниже.

Доверительный интервал — интервал, границы которого являются функциями от выборочных данных и который накрывает истинное значение оцениваемого параметра с вероятностью не менее $(1-\alpha)$, где $(1-\alpha)$ — доверительная вероятность.

Примечание из ГОСТ 50779.21–2004: доверительный интервал может быть *двусторонним* или *односторонним* (рис. 3.3).

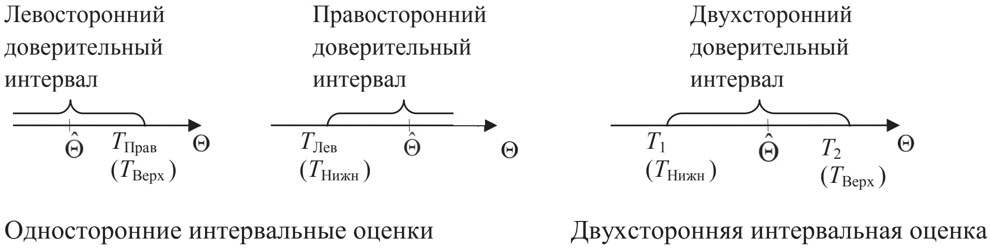


Рис. 3.3. Виды доверительных интервалов (по ГОСТ 50779.21–2004):
$T_{\text{Пр}}$, $T_{\text{Лев}}$, T_1, T_2 — границы доверительных интервалов (границы интервалов оценивания);
Θ — точечная оценка неизвестного оцениваемого параметра распределения Θ

По ГОСТ Р 50779.10–2000: если T_1 и T_2 — две функции от наблюдаемых значений, таких что для оценки параметра распределения совокупности Θ вероятность $P_r(T_1 \leq \Theta \leq T_2)$ равна $(1-\alpha)$, где $(1-\alpha)$– константа, положительная и меньше 1, то интервал между T_1 и T_2 — это **двусторонний доверительный интервал (**two-sided confidence interval) для Θ при доверительной вероятности $(1-\alpha)$.

По ГОСТ Р 50779.10–2000: если T — функция от наблюдаемых значений, такая что для оценки параметра распределения совокупности Θ вероятность $P_r(T \geq \Theta)$ или вероятность $P_r(T \leq \Theta)$ равна $(1-\alpha)$, где $(1-\alpha)$ — константа положительная и меньше 1, то интервал от наименьшего возможного значения Θ до T или интервал от T до наибольшего возможного значения Θ — это **односторонний доверительный интервал** (one-sided confidence interval) для Θ при доверительной вероятности $(1-\alpha)$.

Примечание из ГОСТ Р 50779.10–2000 к терминам «односторонний» или «двусторонний доверительный интервал»: границы T или T_1 и T_2 одностороннего или двустороннего доверительного интервала соответственно — это статистики, которые в общих предположениях принимают различные значения от выборки к выборке. В длинном ряду выборок относительная частота случаев, когда доверительный интервал накрывает истинное значение параметра совокупности Θ, больше или равна $(1-\alpha)$.

Границы T или T_1 и T_2, используемые при построении доверительных интервалов, называются доверительными границами (односторонняя или двусторонняя соответственно) и рассчитываются по конкретным формулам с использованием опытных данных.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **доверительная граница (**confidence limit) — каждая из границ, нижняя T_1 и верхняя T_2, двустороннего доверительного интервала или граница T для одностороннего интервала.

Исходя из идеологии построения доверительного интервала любого параметра Θ, всегда существует вероятность ошибиться, т. е. существует вероятность того, что истинное значение параметра Θ окажется вне построенного доверительного интервала. Для количественной характеристики степени уверенности в том, что построенный доверительный интервал накрывает оцениваемое значение, используется величина, называемая доверительной вероятностью или уровнем доверия.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **доверительная вероятность; уровень доверия** (confidence coefficient; confidence level) — величина $(1-\alpha)$ — вероятность, связанная с доверительным интервалом или со статистически накрывающим интервалом.

Примечание: величину $(1-\alpha)$ часто выражают в процентах.

Обозначенную в ГОСТ Р 50779.10–2000 величину доверительной вероятности $(1-\alpha)$ в большинстве известной литературы обозначают p, а величину α называют уровнем значимости или верхней вероятностью, эти величины связаны очевидным соотношением

$$p+\alpha=1.$$

Наибольшее практическое значение имеют интервальные оценки для выделенных нами выше основных числовых характеристик случайной величины (математического ожидания μ, генеральной дисперсии σ^2 и генерального среднеквадратического отклонения σ), которые, кроме того, являются и параметрами наиболее широко используемого нормального закона распределения. Ниже рассмотрены процедуры построения интервальных оценок именно для этих числовых характеристик (идеология построения интервальных оценок для других числовых характеристик, отнесенных нами к «дополнительным», аналогична, но требует использования других статистик и законов их распределения).

3.4.1. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной генеральной дисперсии

В основе получения этой оценки математического ожидания лежит следующее свойство среднего арифметического: если непрерывная случайная величина X распределена нормально с параметрами μ и σ^2, то и среднее арифметическое $\bar{x}$ выборочных данных этой величины, рассчитанное по N независимым наблюдениям, также распределено нормально, но с параметрами μ и $\frac{\sigma^2}{N}$. Доказательство этого свойства можно найти во многих учебниках, например в [17], [18].

С учетом данного свойства нормированная случайная величина среднего арифметического $\bar{x}$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \tag{3.6}$$

будет подчиняться стандартизованному нормальному закону распределения (распределению Лапласа-Гаусса (2.19)).

Из условия нормирования (3.6) можно получить уравнение для расчета в зависимости от значения u:

$$\bar{x} = \mu + u\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{3.7}$$

Если в выражении (3.7) под u понимать квантиль порядка p, u_P, то и значение $\bar{x}$ также будет квантилем того же порядка $\bar{x}_P$:

$$\bar{x}_p = \mu + u_p\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{3.8}$$

Двусторонний доверительный интервал

Для построения двустороннего доверительного интервала зададимся некоторым малым значением уровня значимости α (например, одним из наиболее часто используемых значений $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$). Определим вероятности $P_1 = \alpha / 2$ и $P_2 = 1 - \alpha / 2$ так, чтобы доверительная вероятность (вероятность нахождения значения математического ожидания в строимом доверительном интервале) $P = P_2 - P_1$ равнялась бы величине $(1-\alpha)$. Вероятность P попадания случайной величины $\bar{x}$ в некоторый диапазон от $\bar{x}_{P1}$ до $\bar{x}_{P2}$, определяемый квантилями соответствующих порядков P_1 и P_2 этой случайной величины,

$$P\left(\bar{x}_{p_1} < \bar{x} \le \bar{x}_{p_2}\right) = P_2 - P_1 = P = 1 - \alpha. \tag{3.9}$$

В выражении (3.9) P_1 — вероятность непревышения рассматриваемой случайной величиной $\bar{x}$ левой границы $\bar{x}_{P_1}$ и P_2 — вероятность непревышения правой границы $\bar{x}_{P_2}$.

При подстановке выражения (3.8) в формулу (3.9) получим

$$P\left(\mu + u_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{x} \le \mu + u_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P;$$

$$P\left(-\bar{x} + u_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < -\mu \le -\bar{x} + u_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P;$$

$$P\left(\bar{x} + u_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} > \mu > \bar{x} + u_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P;$$

$$P\left(\bar{x} - u_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} - u_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P. \tag{3.10}$$

Из выражения (3.10) можно выделить интересующую нас двустороннюю интервальную оценку, построенную при доверительной вероятности P:

$$\bar{x} - u_{p_2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} - u_{p_1}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{3.11}$$

Учитывая принятые симметричные значения вероятностей $P_1 = \alpha / 2$ и $P_2 = 1 - \alpha / 2$, симметричность стандартизованного нормального закона распределения (что определяет соотношение $u_{P_1} = -u_{P_1}$), а также то обстоятельство, что в таблицах квантилей этого распределения обычно приводятся значения u_P для вероятностей $P \ge 0{,}5$ (прил. 5), выражение (3.11) можно переписать в виде, удобном для практического использования:

$$\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{3.12}$$

В ряде справочников таблицы квантилей стандартизованного нормального закона распределения построены не в зависимости от величины вероятности непревышения значения P (как, например, в прил. 5), а в зависимости от вероятности превышения этого значения $\alpha = 1 - P$. При использовании таких таблиц следует использовать выражение

$$\bar{x} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Левосторонний доверительный интервал

Задавшись доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$, учитывая смысл одностороннего доверительного интервала, показанный на рис. 3.1, и используя подход, аналогичный рассмотренному выше при построении двустороннего интервала, можно получить следующее выражение для левостороннего доверительного интервала:

$$\mu \le \bar{x} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \tag{3.13}$$

где $u_{1-\alpha}$ — значение квантиля стандартизованного нормального закона распределения, определяемое для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ (прил. 5).

Правосторонний доверительный интервал

В выражении для правостороннего доверительного интервала, построенном также для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$, используются те же величины, что и в выражении (3.13):

$$\mu > \bar{x} + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Следует обратить особое внимание на то, что при построении двустороннего доверительного интервала из таблицы выбирается значение квантиля $u_{1-\alpha/2}$ для доверительной вероятности $1 - \alpha/2$, а при построении односторонних доверительных интервалов — значение квантиля $u_{1-\alpha}$ для доверительной вероятности $1 - \alpha$.

3.4.2. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестной генеральной дисперсии

Очень часто значение генеральной дисперсии σ^2 исходного распределения неизвестно. В этом случае при построении доверительных интервалов для математического ожидания используют выборочную дисперсию s^2.

Для записи нормированной случайной величины, аналогичной формуле (3.6), используют выборочное стандартное отклонение s (оценку для генерального стандартного отклонения):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\mathrm{s}/\sqrt{N}}.$$

Величина t подчиняется распределению Стьюдента.

Используя понятие квантиля и проведя рассуждения, аналогичные приведенным в п. 4.3.1, можно получить выражения для расчета границ доверительных интервалов для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии σ^2:

- двусторонний доверительный интервал

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,\nu} \frac{s}{\sqrt{N}} < \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,\nu} \frac{s}{\sqrt{N}}, \tag{3.14}$$

где $t_{\alpha/2,\nu}$ — значение квантиля распределения Стьюдента, определяемое по прил. 7 для уровня значимости $\alpha/2$ и числа степеней свободы $\nu = N - 1$;

- левосторонний доверительный интервал

$$\mu \le \bar{x} + t_{\alpha,\nu} \frac{s}{\sqrt{N}}, \tag{3.15}$$

где $t_{\alpha,\nu}$ — значение квантиля распределения Стьюдента, определяемое по прил. 7 для уровня значимости α и числа степеней свободы $\nu = N - 1$;

- правосторонний доверительный интервал

$$\mu > \bar{x} - t_{\alpha,\nu} \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

3.4.3. Интервальная оценка генеральной дисперсии нормально распределенной случайной величины

При построении доверительного интервала для **генеральной** дисперсии σ^2 нормально распределенной случайной величины X используют случайную величину

$$\chi^2 = \frac{s^2}{\sigma^2}(N-1), \tag{3.16}$$

подчиненную распределению Пирсона (χ^2-распределению), s^2 — выборочная дисперсия.

Зададимся некоторым малым значением уровня значимости α (например, $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$). Для построения двустороннего доверительного интервала определим вероятности $P_1 = \alpha / 2$ и $P_2 = 1 - \alpha / 2$. При этом доверительная вероятность $P = P_2 - P_1 = 1 - \alpha$.

Вероятность P попадания случайной величины χ^2 в интервал, определяемый квантилями соответствующих порядков P_1 и P_2 (от $\chi^2_{\text{p}1,\nu}$ до $\chi^2_{\text{p}2,\nu}$), можно представить в виде выражения

$$P\left(\chi^2_{\text{p}2,\nu} < \chi^2 \le \chi^2_{\text{p}1,\nu}\right) = P. \tag{3.17}$$

С учетом равенства (3.16) выражение (3.17) можно преобразовать:

$$P\left(\chi^2_{\text{p}2,\nu} < \frac{s^2}{\sigma^2}(N-1) \le \chi^2_{\text{p}1,\nu}\right) = P\left(s^2\,\frac{N-1}{\chi^2_{p1,\nu}} < \sigma^2 \le s^2\,\frac{N-1}{\chi^2_{p2,\nu}}\right) = P. \tag{3.18}$$

Из выражения (3.18) можно выделить двустороннюю интервальную оценку генеральной дисперсии σ^2 для доверительной вероятности $P = P_2 - P_1$:

$$s^2\,\frac{N-1}{\chi^2_{P1,\nu}} < \sigma^2 \le s^2\,\frac{N-1}{\chi^2_{P2,\nu}}. \tag{3.19}$$

Значения квантилей распределения Пирсона $\chi^2_{P1,\nu}$ и $\chi^2_{P2,\nu}$ можно определить по прил. 6.

Часто таблицы квантилей распределения Пирсона строятся не в зависимости от доверительных вероятностей P_1 и P_2, называемых также «нижние вероятности», а в зависимости от так называемой «верхней вероятности», обозначенной нами α, как представлено в прил. 6. С учетом связей данных вероятностей $P_1 = \alpha / 2$ и $P_2 = 1 - \alpha / 2$ выражение (3.19) можно переписать в виде

$$s^2 \frac{N-1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}} < \sigma^2 \le s^2 \frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}, \tag{3.20}$$

где $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ — квантили распределения Пирсона, определяемые по прил. 6 в зависимости от уровней значимости $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$, ν соответственно и числа степеней свободы $\nu = N-1$.

Левосторонний доверительный интервал

$$\sigma^2 \le s^2 \frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha,\,\nu}},$$

где $\chi^2_{1-\alpha,\,\nu}$ — квантиль распределения Пирсона, определяемый по прил. 6 в зависимости от уровней значимости $1-\alpha$ и числа степеней свободы $\nu = N-1$.

Правосторонний доверительный интервал

$$\sigma^2 > s^2 \frac{(N-1)}{\chi^2_{\alpha,\,\nu}},$$

где $\chi^2_{\alpha,\,\nu}$ — квантиль распределения Пирсона, определяемый по прил. 6 в зависимости от уровней значимости α и числа степеней свободы $\nu = N-1$.

3.4.4. Интервальная оценка генерального стандартного отклонения нормально распределенной случайной величины

Построение доверительного интервала для генерального стандартного отклонения нормально распределенной случайной величины X проводят путем извлечения корня квадратного из соответствующих границ интервальной оценки для генеральной дисперсии (см. п. 3.4.3):

- двусторонний доверительный интервал

$$s^2 \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}} < \sigma^2 \le s^2 \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}}; \tag{3.21}$$

- левосторонний доверительный интервал

$$\sigma \leq s\frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha,\,\nu}};$$

- правосторонний доверительный интервал

$$\sigma > s\frac{(N-1)}{\chi^2_{\alpha,\nu}}.$$

3.5. Планирование оценочного эксперимента

Основной целью рассмотренного выше интервального оценивания некоторого генерального параметра Θ случайной величины X является расчет числовых значений границ доверительного интервала этого параметра $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}$. Ширина двустороннего доверительного интервала $L = \widehat{\Theta}_{\text{Пр}} - \widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ является мерой точности интервальной оценки. Чем меньше L, тем более точной является оценка.

Другой важной характеристикой интервальной оценки является доверительная вероятность $P = 1-\alpha$ (α — уровень значимости, называемый также верхней вероятностью). Доверительная вероятность P является мерой надежности интервальной оценки и характеризует степень уверенности в том, что доверительный интервал действительно накроет истинное значение оцениваемого параметра Θ.

При построении любой двусторонней интервальной оценки хотелось бы получить ее с максимальной точностью и с максимальной надежностью. Однако при фиксированной статистической ситуации удовлетворить оба эти пожелания невозможно. Увеличение степени надежности оценки, т.е. увеличение доверительной вероятности P, приводит к увеличению ширины доверительного интервала L, т.е. к уменьшению точности оценку, и, наоборот, увеличение точности L приводит к уменьшению надежности P.

При фиксированной статистической ситуации принципиально возможны два пути построения доверительного интервала:

- задать ширину интервала L (путем назначения его границ $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}$) и оценить надежность оценки, рассчитав доверительную вероятность P;

- задать доверительную вероятность P и оценить точность оценки, рассчитав ширину доверительного интервала L (путем расчета значений его границ $\widehat{\Theta}_{\text{Лев}}$ и $\widehat{\Theta}_{\text{Пр}}$). На практике чаще используют именно этот вариант.

Однако, кроме этих двух вариантов, возможен и третий — изменить статистическую ситуацию и повлиять тем самым на соотношение L и P.

Анализируя расчетные выражения для двусторонних интервальных оценок (см. выражения (3.11), (3.16)) с позиции влияния входящих в них величин на ширину доверительного интервала, можно заметить, что в каждое из таких выражений входит величина N — объем выборки. В расчетных выражениях для интервальных оценок N может находиться как в числителе, так и в знаменателе, что должно приводить к различному его влиянию на результат. Но при детальном анализе выясняется, что влияние N во всех выражениях одинаково: увеличение N приводит к уменьшению ширины доверительного интервала L, т. е. увеличивает точность оценки. Такое влияние N на точность оценивания не случайно, а связано с использованием оценок, удовлетворяющих свойству состоятельности оценки (см. подглаву 3.2).

Учитывая сказанное, может быть поставлена и решена следующая задача: рассчитать необходимый объем выборки N, позволяющий при заданной доверительной вероятности Р построить доверительный интервал заданной ширины L, обеспечивающий заданную точность оценивания. Для решения данной задачи необходимо преобразовать расчетные выражения для интервальных оценок (3.11), (3.15) и аналогичные выражения к виду, пригодному для расчета необходимой величины N, т. е. к виду

$$N = N\left(L, P\right). \tag{3.22}$$

Постановка и решение задачи расчета необходимого количества измерений N (количество необходимых опытов N) соответствует одному из видов планирования эксперимента — планированию оценочного эксперимента. Необходимо заранее определить, запланировать условия проведения эксперимента, в данном случае — установить количество необходимых опытов N.

Ниже рассматриваются процедуры такого планирования условий проведения эксперимента — определение нужного количества измерений случайной величины X, чтобы получить возможность построения интервальных оценок для оценивания основных генеральных числовых характеристик этой случайной величины с заданной точностью (с заданной шириной доверительного интервала). Будем полагать, как и ранее, что рассматриваемая случайная величина имеет нормальный закон распределения.

3.5.1. Расчет необходимого числа измерений для оценивания математического ожидания с заданной точностью при известной генеральной дисперсии

Для построения интервальной оценки математического ожидания некоторой случайной величины X при условии, что генеральная дисперсия σ^2 этой случайной величины считается известной (в п. 3.4.1 использовано выражение (3.12)). Преобразуем его к виду выражения (3.22). При этом будем считать, что заданы ширина доверительного интервала L и уровень значимости α.

Ширина доверительного интервала L равна разности между значениями правой и левой границ:

$$L=\left(\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)-\left(\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)=2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \qquad (3.23)$$

Из выражения (3.23) можно получить уравнение для расчета необходимого количества измерений N:

$$N=\left(2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{L}\right)^2, \qquad (3.24)$$

где σ — генеральное стандартное отклонение (корень квадратный из известной генеральной дисперсии σ^2); L — ширина доверительного интервала, которую необходимо получить при интервальном оценивании (точность оценки); $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартизованного нормального закона распределения, определяемый по таблицам в зависимости от заданной доверительной вероятности $P=1-\alpha/2$ (прил. 5).

3.5.2. Расчет необходимого числа измерений для оценивания математического ожидания с заданной точностью при неизвестной генеральной дисперсии

При получении выражения для расчета необходимого числа измерений N с целью оценить математическое ожидание с заданной точностью при неизвестной генеральной дисперсии используем выражение (3.14). Проведя преобразования, аналогичные приведенным в п. 3.5.1, можно получить следующее расчетное выражение для N:

$$N = \left(2t_{\alpha,\nu} \frac{s}{L} \right)^2, \tag{3.25}$$

где s — выборочное стандартное отклонение; L — ширина доверительного интервала, которую необходимо получить при интервальном оценивании (точность оценки); $t_{\alpha,\nu}$ — квантиль t-распределения (распределения Стьюдента), определяемый по таблицам в зависимости от заданного уровня значимости $\alpha/2$ и числа степеней свободы $\nu = N - 1$ (прил. 9).

Число степеней свободы, используемое при определении квантиля $t_{\alpha,\nu}$, $\nu = N - 1$, зависит от объема используемой выборки N, а значит, и само значение квантиля распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$ также зависит от количества измерений N. Получается, что в уравнение (3.25) N входит в явном виде в левую часть и в неявном виде в правую часть (как аргумент квантиля $t_{\alpha,\, N-1}$).

Аналитическое решение уравнения (3.25) относительно N или невозможно, или сопряжено со значительными математическими затруднениями в связи со сложным видом уравнения функции распределения Стьюдента (см. п. 2.4.2, выражение (2.26)). Наиболее просто решение уравнения (3.25) относительно N может быть получено численным методом, в данном случае — методом последовательного приближения.

Процедура расчета следующая:

1) принимаем некоторое исходное значение объема выборки N;

2) определяем по таблице квантилей распределения Стьюдента (прил. 7) значение квантиля $t_{\alpha,\, N-1}$;

3) по выражению (3.25) рассчитываем объем выборки N';

4) если N и N' совпали (или возникает циклическое повторение результатов расчета), то расчет заканчиваем, если нет, то принимаем $N = N'$ и повторяем процедуру расчета начиная с п. 2.

3.5.3. Расчет необходимого числа измерений для оценивания генеральной дисперсии с заданной точностью

В качестве основы для получения расчетного выражения используем неравенство (3.20).

Ширина доверительного интервала составит

$$L = s^2 \frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}} - s^2 \frac{N-1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}} = s^2 (N-1)\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}} - \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}\right).$$

После очевидных преобразований получим выражение для расчета объема выборки N:

$$N = \frac{L}{s^2} \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}\chi^2_{\alpha/2,\nu}}{\chi^2_{\alpha/2,\nu} - \chi^2_{1-\alpha/2,\nu}} + 1, \tag{3.26}$$

где $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ — квантили распределения Пирсона, определяемые по прил. 6 в зависимости от уровней значимости $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ соответственно и числа степеней свободы $\nu = N-1$.

Значения квантилей распределения Пирсона $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ зависят от числа степеней свободы $\nu = N-1$ и, таким образом, зависят от объема используемой выборки N, которая входит в явном виде в левую часть уравнения (3.26) и в неявном виде в правую часть как аргумент квантилей $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$. В связи со сложным видом уравнения функции распределения Пирсона (см. п. 2.4.6, выражение (2.25)) наиболее просто решение уравнения (3.26) относительно N может быть получено численным методом, в данном случае — методом целенаправленного перебора.

Может быть применена следующая процедура численного расчета:

1) принимаем некоторое исходное значение объема выборки N;

2) определяем по таблице квантилей распределения Пирсона (прил. 6) значения квантилей $\chi^2_{\alpha/2,N-1}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\,N-1}$;

3) по выражению (3.26) рассчитываем объем выборки N' и округляем полученное значение до целых;

4) если N и N' совпали, то расчет заканчиваем;

5) если N и N' не совпали, то принимаем новое значение N в зависимости от следующих соотношений: при $N' < N$ значения N увеличиваем, а при $N' > N$ — уменьшаем. Повторяем процедуру расчета начиная с п. 2.

3.5.4. Расчет необходимого числа измерений для оценивания генерального стандартного отклонения с заданной точностью

Из неравенства (3.21) ширина доверительного интервала для генерального стандартного отклонения составит

$$L=\sqrt{s^2\frac{N-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}}-\sqrt{s^2\frac{N-1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}}=s\sqrt{(N-1)}\left(\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}}-\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}}\right).$$

Возведя левую и правую части равенства в квадрат и проделав простые преобразования, получим выражение для расчета объема выборки N:

$$N=\frac{L^2}{s^2}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}}-\sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}}\right)}+1. \tag{3.27}$$

Выражение (3.27) можно переписать и в другой, более компактной и удобной для расчетов, форме

$$N=\frac{L^2}{s^2}\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}\chi^2_{\alpha/2,\nu}}{\left(\sqrt{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}-\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}\right)^2}+1. \qquad (3.28$$

В выражениях (3.27) и (3.28) $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ — квантили распределения Пирсона, определяемые по прил. 8 в зависимости от уровней значимости $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно и степеней свободы $\nu=N-1$.

Аналогично рассмотренному выше (см. п. 3.5.3), решение уравнений (3.27) или (3.28) наиболее просто может быть получено численным методом с помощью последовательности численного расчета, описанной в п. 3.5.3.

В [15] приводится уравнение для расчета объема выборки N в целях последующего оценивания генерального стандартного отклонения с относительной точностью $\varepsilon_\sigma=\dfrac{L}{s}$:

$$(1+\varepsilon_\sigma)^2=\frac{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}{\chi^2_{0,5,\nu}},$$

где $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{0,5,\nu}$ — квантили распределения Пирсона, определяемые по прил. 6 в зависимости от уровней значимости $\alpha/2$ и 0,5 соответственно и числа степеней свободы $\nu=N-1$.

Решение уравнение относительно N рекомендуется находить численным итерационным методом.

При наличии выборки, содержащей более 15 значений, например в [16], рекомендуется использовать приближенное уравнение, позволяющее рассчитать N напрямую и избежать необходимости применения численных методов:

$$N = 1{,}5 + \frac{u_{1-\alpha/2}^{2}}{2\Delta_{\sigma}^{2}},$$

где $u_{1-\alpha/2}^{2}$ — квантиль стандартизованного нормального закона распределения, определяемый по прил. 6 в зависимости от доверительной вероятности $1-\alpha/2$.

4. Статистические гипотезы и их проверка

При использовании экспериментальных методов для решения конкретных практических задач очень часто приходится делать некоторые предположения относительно свойств одной или нескольких неизвестных генеральных совокупностей, представленных в виде выборки ограниченного объема. Такие предположения направлены на анализ каких-то свойств и характеристик неполностью определенных случайных величин, и их называют статистическими гипотезами.

Роль статистических гипотез при обработке экспериментальных данных весьма высока. Без них невозможно обойтись даже в наиболее простом варианте статистической обработки опытных данных — при построении интервальных оценок. Например, при построении интервальных оценок необходимо высказать и проверить предположение (статистическую гипотезу) о виде закона распределения случайной величины. Кроме того, всегда подразумевалось, что все выборочные значения принадлежат одной и той же генеральной совокупности (статистическая гипотеза) и в выборке нет инородных, резко выделяющихся значений (статистическая гипотеза).

Невозможно обойтись без использования статистических гипотез в случае, если возникает задача сравнения двух или более генеральных характеристик случайных величин, которые обычно не известны. В ряде других более сложных случаев также не обойтись без использования статистических гипотез.

По ГОСТ 15895–77 **статистической гипотезой** называют любое предположение, касающееся неизвестного распределения случайной величины в совокупности.

В соответствии с таким определением, спектр возможностей для формирования и использования статистических гипотез очень широк. Статистические гипотезы можно формулировать относительно любых свойств случайных величин, их числовых характеристик, параметров распределения, отдельных значений и т. п.

Все статистические гипотезы подразделяют на простые и сложные.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **простая гипотеза** (simple hypothesis) — гипотеза, которая полностью задает распределение совокупности.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **сложная гипотеза** (composite hypothesis) — гипотеза, которая не полностью задает распределение совокупности.

Примечание из ГОСТа: сложная гипотеза — это обычно гипотеза, которая включает в себя бесконечную систему простых гипотез. В предположении нормального распределения гипотеза $\mu = \mu_0$ будет простой, если стандартное отклонение совокупности известно, но она будет сложной, если оно неизвестно.

Таким образом, простая гипотеза однозначно определяет какой-то конкретный закон распределения с известными параметрами такого распределения, а сложная гипотеза лишь относит распределение к какому-то семейству распределений, не конкретизируя значения одного, двух или более параметров этого распределения. Другими словами, если распределение имеет k параметров и выдвигаемая гипотеза задает l из них в виде конкретных значений, то при $k = l$ гипотеза является простой, а при $k > l$ — сложной. Геометрически это можно представить так: если гипотеза задает в k-мерном пространстве единственную точку, то это простая гипотеза, а если гипотеза выделяет область k-мерного пространства, содержащую более одной точки, то это сложная гипотеза. В этом случае величину $\nu = k - l$ называют числом степеней свободы гипотезы, а величину l — числом ограничений, накладываемых гипотезой.

Пример. Для экспоненциального распределения (2.22), (2.23) гипотеза $\lambda = 2$ простая, а гипотеза $\lambda > 2$ сложная, состоящая из бесконечного числа простых гипотез вида $\lambda = c$, где c — любое число больше 2.

Формирование и проверка статистических гипотез тесно связаны с интервальным (доверительным) оцениванием. Отличие этих двух статистических методов состоит, прежде всего, в цели использования каждого из них. При интервальном оценивании целью является определение границ доверительного интервала, точности оценивания, уровня достоверности и т. п. А при использовании статистических гипотез целью является проверка справедливости некоторого утверждения (гипотезы) на основании неполной информации об изучаемой случайной величине.

Для проверки статистических гипотез используют в основном два метода: классический метод (классический подход) и метод достигаемого уровня значимости. Оба метода достаточно близки по идеологии, используют одинаковую терминологию и существенно отличаются лишь в части вероятностной формулировки полученного вывода.

Не вдаваясь в технологические подробности (будут рассмотрены ниже), принципиальное отличие этих методов состоит в следующем. Суть классического подхода заключается в поиске статистических оснований для отвержения некоторой заранее сформулированной гипотезы *при заданном уровне доверия*. При этом формулируется некоторая гипотеза, задается некоторая пороговая величина уровня доверия и на основании проверки по опытным данным делается вывод о том, справедлива или нет данная гипотеза при данном принятом уровне доверия. Суть метода достигаемого уровня значимости состоит *в установлении величины уровня доверия*, при котором можно считать справедливой заранее сформулированную проверяемую гипотезу. При этом формулируется некоторая гипотеза и по опытным данным устанавливается минимальное значение вероятности того, что мы ошибемся, если отвергнем эту гипотезу.

Классический подход используется достаточно давно, он несколько более прост для понимания и толкования основных понятий и идей проверки, а также более пригоден для «ручной» технологии, не требующей применения компьютера. Поэтому рассматривают технологию проверки гипотез в основном на базе только данного метода. А метод достигаемого уровня значимости рассмотрим отдельно, в виде модификации классического базового метода.

Идею формирования и проверки простых статистических гипотез при классическом подходе в упрощенном (зауженном для простоты трактовок) варианте можно понимать, например, так.

Пусть для некоторого числового параметра случайной величины Θ по выборке объема N вычислена некоторая оценка $\widehat{\Theta}$. Пусть имеется причина предположить, что истинное значение параметра Θ, т. е. его значение для генеральной совокупности, равно Θ_0. Это предположение следует проверить на практике, т. е. используя опытные значения (выборку) этой случайной величины. Такое проверяемое предположение называют нулевой гипотезой, обозначают H_0 и записывают в виде соотношения: $\Theta = \Theta_0$ (для данного конкретного случая).

Даже если нулевая гипотеза абсолютно справедлива, то выборочное значение $\widehat{\Theta}$ обычно не совпадает точно с Θ_0, поскольку $\widehat{\Theta}$ является лишь одним из возможных числовых значений случайной величины Θ, порожденных случайной выборкой случайного объема N. Но если известна функция распределения оценки $F(\widehat{\Theta})$, построенная теоретически в предположении справедливости нулевой гипотезы H_0: $\Theta = \Theta_0$, то с ее помощью можно найти такую зону, вероятность попадания в которую мала (меньше или равна заранее заданному малому значению α, например 5 % или $\alpha = 0{,}05$). Такая маловероятная зона может использоваться в качестве некоторой критической области, т. к. при справедливости нулевой гипотезы вероятность попадания статистики $\widehat{\Theta}$ в эту зону во много раз меньше, чем в другую некритическую область (например, при $\alpha = 0{,}05$ в 0,95/0,05 = 19 раз). Используя такую маловероятную зону, можно сформулировать правило: если статистика $\widehat{\Theta}$ попала в критическую область, то этот факт следует рассматривать как необходимое и достаточное основание для отвержения выдвинутой нулевой гипотезы H_0.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **нулевая гипотеза и альтернативная гипотеза** (null hypothesis and alternative hypothesis) — утверждения относительно одного или нескольких параметров или о распределении, которые проверяют с помощью статистического критерия.

В старых стандартах использовались более простые и конкретные определения.

По ГОСТ 15895–77 **нулевая гипотеза** — гипотеза, подлежащая проверке.

По ГОСТ 15895–77 **альтернативная гипотеза** — каждая допустимая гипотеза, отличная от нулевой.

Альтернативную гипотезу в литературе обозначают H_A или H_1.

В качестве нулевой гипотезы обычно принимают гипотезу, имеющую наиболее важное значение или наиболее вероятную из возможных гипотез в проводимом исследовании. Лучше в качестве нулевой гипотезы использовать простые гипотезы, что понижает вероятность ошибки при прочих равных условиях.

Для одной и той же нулевой гипотезы в большинстве случаев можно сформулировать две или более альтернативных гипотез (это все гипотезы из класса допустимых). В качестве конкретной альтернативной гипотезы из всех возможных выбирают гипотезу, имеющую в проводимом исследовании второе по важности или вероятности значение после нулевой. Чаще всего альтернативная гипотеза является сложной гипотезой.

Нулевую гипотезу выдвигают и затем проверяют с помощью статистических критериев с целью выявить основания для ее отклонения и принятия альтернативной гипотезы. Если имеющийся статистический материал не позволяет отвергнуть нулевую гипотезу, то ее принимают и используют в качестве рабочей до тех пор, пока новые результаты испытаний не позволяет ее отклонить. Важным обстоятельством, особенностью, тонкостью проверки статистических гипотез является то, что она проводится не с целью выбрать наиболее правдоподобную или лучшую из нулевой и альтернативной гипотез, а целью проверки является именно поиск оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **статистический критерий** (statistical test) — статистический метод принятия решений о том, стоит ли отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной или нет.

Примечание из ГОСТа: решение о нулевой гипотезе принимают исходя из значений соответствующих статистик, лежащих в основе статистических критериев или рассчитанных по результатам наблюдений. Поскольку статистики — случайные величины, существует некоторый риск принятия ошибочного решения. Критерий априори предполагает, что проверяют некоторые предположения, например предположение о независимости наблюдений, предположение о нормальности и т. д.

Более простое и в то же время более емкое определение было сформулировано в ранее действующем стандарте.

По ГОСТ 15895–77 **статистический критерий —** однозначно определенный способ проверки статистических гипотез.

В каждом критерии используется какая-то своя специальная случайная величина, которая как-то математически, физически или логически связана с принятой нулевой гипотезой. Такая случайная величина рассчитывается по своей уникальной формуле с использованием опытных данных и поэтому является статистикой. Но поскольку большинство таких статистик специализированы для использования в статистических критериях, выделяют специальный класс статистик — статистики для проверки гипотез.

Статистикой для проверки гипотез называют функцию $g(x_1, x_2, ..., x_N)$ результатов наблюдений, составляющих выборку $x_1, x_2, ..., x_N$, однозначно связанную с принятым статистическим критерием и определяемую им.

Статистики для проверки гипотез подбирают таким образом, чтобы они, с одной стороны, использовали величины, связанные с нулевой гипотезой, и, с другой стороны, чтобы подчинялись какому-то конкретному известному теоретическому распределению.

Довольно частой неточностью, встречающейся в литературе, является обозначение термином «критерий» статистики для проверки гипотез или границы критической области. Это методологически и понятийно неверно. «Критерий» — это именно способ проверки гипотез и принятия решений, «статистика» — это величина, рассчитываемая с использованием опытных данных — функция результатов наблюдений, а «границы критической области» — это конкретное число на числовой оси статистики (см. ниже).

Все принципиально возможные значения статистики для проверки гипотезы (всю числовую ось этой статистики) при помощи одного или двух конкретных числовых значений, называемых границами критической области, делят на две части: область принятия нулевой гипотезы и критическую область.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **критическая область** (critical region) — множество возможных значений статистики, лежащей в основе критерия, для которых отвергают нулевую гипотезу.

Примечание из ГОСТа: критические области определяют таким образом, что если нулевая гипотеза верна, то вероятность ее отбрасывания равна заданному значению α, обычно малому, например 5 или 1 %.

По ГОСТ 15895–77 **критической областью** называют область со следующими свойствами: если значения применяемой статистики принадлежат данной области, то отвергают нулевую гипотезу; в противном случае — ее принимают.

Таким образом, проверка гипотезы формально сводится к выяснению того, в какую область попало рассчитанное значение статистики: если оно попало в критическую область, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, а если в область принятия нулевой гипотезы, то H_0 принимается.

Конкретное числовое значение (или два конкретных числовых значения), отделяющее область принятия нулевой гипотезы от критической области, называют или критическим значением, или границей критической области.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **критическое значение** (critical value) — значение, ограничивающее критическую область.

Критические области бывают односторонние и двухсторонние. Смысл этих областей показан на рис. 4.1.

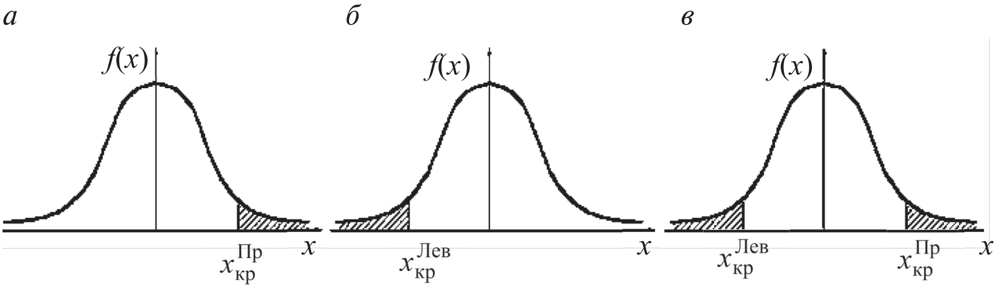


Рис. 4.1. Критические области на графике плотности распределения:
а — правосторонняя; *б* — левосторонняя; *в* — двусторонняя

В соответствии с такими типами критических областей различают односторонние и двусторонние статистические критерии.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **односторонний критерий** (one-sided test) — критерий, в котором используемая статистика одномерна, а критическая область включает в себя множество значений, меньших критического значения, или множество значений, больших критического значения.

Двусторонний критерий (two-sided test) — критерий, в котором используемая статистика одномерна, а критическая область состоит из множества значений, меньших первого критического значения, и множества значений, больших второго критического значения.

Примечание из ГОСТа: выбор между односторонним и двусторонним критериями определяется альтернативной гипотезой.

В большинстве случаев, если хотят убедиться в том, что одна случайная величина строго больше другой (или строго меньше другой), то используют одностороннюю критическую область. В этом случае:

- H_0: $\Theta = \Theta_0$;
- H_1: $\Theta > \Theta_0$ или H_1: $\Theta < \Theta_0$.

Причем в каждом конкретном случае (при конкретном решении) в качестве альтернативной гипотезы выбирают только один вариант:

или $\Theta > \Theta_0$, или $\Theta < \Theta_0$. Выбор между этими двумя вариантами производится на основе имеющегося статистического материала и существа решаемой задачи, выбирают наиболее правдоподобный вариант.

Если проверяют как положительные, так и отрицательные расхождения между изучаемыми величинами, то используют двустороннюю критическую область. В этом случае:

- H_0: $\Theta = \Theta_0$;
- H_1: $\Theta \neq \Theta_0$.

Все возможные исходы проверки статистических гипотез делят на значимые результаты и незначимые результаты.

По ГОСТ Р 50779.10–2000 **значимый результат** (на выбранном уровне значимости α) (significant result (at the closen significance level α) — результат статистической проверки, который приводит к отбрасыванию нулевой гипотезы, в противном случае — результат незначим.

Примечание из ГОСТа: когда результат проверки называют статистически значимым, это показывает, что результат выходит за тот диапазон значений, в который укладываются случайные воздействия, когда нулевая гипотеза верна.

Поскольку решения о справедливости или ложности статистических гипотез базируются на вероятностных свойствах случайных величин и расчет статистик проводится по выборкам ограниченного объема, то при принятии решения всегда возможны ошибки. Возможность ошибки заложена в самом методе проверки гипотез, идеология рассуждений здесь такая же, как и при построении интервальных оценок (см. подглаву 2.4). Принципиально возможны четыре исхода проверки нулевой гипотезы, из которых два ошибочные (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Возможные исходы проверки нулевой гипотезы

Нулевая гипотеза	Объективно верна	Объективно не верна
Принимается	Правильное решение	Ошибка 2-го рода
Отвергается	Ошибка 1-го рода	Правильное решение

По ГОСТ Р 50779.10–2000:

- **ошибка первого рода** (of the first kind) — ошибка, состоящая в отбрасывании нулевой гипотезы, поскольку статистика принимает значение, принадлежащее критической области, в то время как эта нулевая гипотеза верна;

- **вероятность ошибки первого рода** (type I error probability) — вероятность допустить ошибку первого рода.
  Примечание из ГОСТа: вероятность ошибки первого рода всегда меньше «уровня значимости» критерия или равна ему;
- **уровень значимости** (критерия) (significance level) — заданное значение верхнего предела вероятности ошибки первого рода.
  Примечание из ГОСТа: уровень значимости обычно обозначают α. В практике проверки статистических гипотез наиболее часто принимают уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}025$, реже $\alpha = 0{,}01$ или $\alpha = 0{,}1$;
- **ошибка второго рода** (error of the second kind) — ошибка принять нулевую гипотезу, поскольку статистика принимает значение, не принадлежащее критической области, в то время как нулевая гипотеза не верна;
- **вероятность ошибки второго рода** (type II error probability) — вероятность допустить ошибку второго рода.
  Примечание из ГОСТа: вероятность ошибки второго рода, обычно обозначаемая β, зависит от реальной ситуации и может быть вычислена лишь в том случае, если альтернативная гипотеза задана адекватно;
- **мощность критерия** (power of a test) — вероятность недопущения ошибки второго рода.
  Примечание из ГОСТа: мощность критерия — это вероятность отбрасывания нулевой гипотезы, когда она не верна. Мощность критерия обычно обозначают $(1-\beta)$.

Однозначного ответа на вопрос, какая из ошибок опасней (1-го или 2-го рода), не существует, все зависит от конкретных условий проведения эксперимента, условий получения опытных данных или условий использования результатов проверки гипотез.

Пример. Если проверяется правильность диагноза, устанавливаемого больному (нулевая гипотеза H_0: конкретный диагноз, альтернативная гипотеза H_1: неизвестный диагноз), то ошибка первого рода означает отказ от принятия правильного диагноза, что стимулирует поиск новых методов обследования больного и приводит только к замедлению правильного лечения до момента поступления новых данных. А ошибка второго рода означает принятие неправильного диагноза, назначение неправильного лечения, что чревато ухудшением состояния больного, т. е., скорей всего, такая ошибка является более опасной.

На практике обычно величиной α задаются и стараются использовать такой критерий, чтобы значение мощности $(1-\beta)$ было бы наибольшим.

В литературе по статистическим методам анализа можно найти достаточно много различных последовательностей, схем и алгоритмов проведения проверки статистических гипотез. Большинство таких алгоритмов похожи и отличаются лишь деталями, отражающими индивидуальные предпочтения авторов. Один из таких алгоритмов приведен ниже.

Алгоритм проверки статистических гипотез может быть сведен к последовательному выполнению следующих операций:

1) формулируют нулевую гипотезу H_0;
2) формулируют альтернативную гипотезу H_1;
3) выбирают критерий для проверки H_0;
4) рассчитывают статистику, относящуюся к выбранному критерию;
5) находят границы критической области и местоположение критической области;
6) проверяют попадание рассчитанной статистики в критическую область и делают вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы.

Все последующие отдельные случаи проверки статистических гипотез будем проводить в соответствии именно с этим алгоритмом (используя нумерацию соответствующих пунктов алгоритма).

4.1. Методика проверки статистических гипотез на основе достигаемого уровня значимости

Рассмотренную выше методику проверки статистических гипотез называют классической методикой или методикой с фиксированным уровнем значимости. Основное удобство и достоинство этой методики состоит в том, что можно достаточно просто произвести отыскание границ критической области, в качестве которых чаще всего используются квантили известных теоретических распределений, широко представленных в справочной и учебной литературе. Большинство часто применяемых теоретических распределений табулировано, а это позволяет большинство сложных для вычислений числовых значений квантилей определять по соответствующим таблицам в зависимости от фиксированной величины уровня значимости α и числовых значений параметров, от которых зависит используемое распределение.

С развитием и широким распространением компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения стала доступна другая методика проверки статистических гипотез, основанная на использовании понятия «достигаемый уровень значимости».

Терминология и идеология этого модифицированного метода проверки статистических гипотез такая же, как и при классическом подходе. Дополнительно вводится следующее понятие.

Достигаемый уровень значимости (p-value — пи-величина) — это наименьшая величина уровня значимости α, при которой нулевая гипотеза отвергается для расчетного значения статистики, применяемой при использовании конкретного критерия.

Обозначим достигаемый уровень значимости величиной $p(\Theta)$.

Для конкретного статистического критерия расчет значения достигаемого уровня значимости $p(\Theta)$ производят в зависимости от вида критической области.

Для правосторонней критической области:

- с использованием данных имеющейся выборки рассчитывают значение статистики $\widehat{\Theta}$ используемого критерия;
- приравнивают расчетное значение $\widehat{\Theta}$ величине границы критической области $\Theta_{1-\alpha}$;
- используя известную функцию распределения статистики $F(\widehat{\Theta})$ данного статистического критерия, подбирают уровень значимости α, соответствующий квантилю $\Theta_{1-\alpha}$ этого распределения.

  Если известна обратная функция к функции распределения статистики $F(\widehat{\Theta})$, то, используя эту обратную функцию, можно рассчитать значение уровня значимости α;
- определенное одним из способов значение α приравнивают величине достигаемого уровня значимости $p(\Theta)$.

Для левосторонней критической области вместо квантиля $\Theta_{1-\alpha}$ используют квантиль Θ_{α}.

Для двусторонней критической области (при нулевой гипотезе вида $H_0\colon \Theta = \Theta_0$ и альтернативной гипотезе $H_1\colon \Theta \neq \Theta_0$), в зависимости от направления смещения статистики $\widehat{\Theta}$ от центра распределения, значение $\widehat{\Theta}$ приравнивают или квантилю $\Theta_{\alpha/2}$ (для левосторонней границы критической области), или квантилю $\Theta_{1-\alpha/2}$ (для правосторонней границы) и для соответствующего квантиля определяют значение α.

Для проверки справедливости нулевой гипотезы H_0 анализируют определенный таким образом достигаемый уровень значимости $p(\Theta)$. Если значение $p(\Theta)$ достаточно мало (близко к нулю), то нулевая гипотеза отвергается.

Можно выбрать некоторое пороговое (предельно допустимое или критическое) значение достигаемого уровня значимости $p(\Theta)$ — $\left[p(\Theta)\right]$ (например, $\left[p(\Theta)\right] = 0,01$ или $\left[p(\Theta)\right] = 0,05$) и использовать его в качестве основы для формирования правила принятия решения в виде условия $p(\Theta) > \left[p(\Theta)\right]$. При нарушении данного условия нулевую гипотезу H_0 следует отвергнуть. При таком подходе рассматриваемая методика проверки статистических гипотез с использованием понятия «достигаемый уровень значимости» будет практически эквивалентна рассмотренной выше классической методике. Однако такой подход, скорей всего, является чрезмерным упрощением, отказом от потенциально имеющихся возможностей p-value метода.

Имеет смысл напомнить еще раз, что при использовании механизма проверки статистических гипотез (в любом варианте проверки), даже в случае принятия нулевой гипотезы, в 100α % случаев вывод будет ошибочным в связи со всегда имеющейся вероятностью совершить ошибку первого рода.

4.2. Критерии для исключения резко выделяющихся значений и грубых ошибок

Разброс экспериментальных данных вокруг некоторого центра рассеяния является нормальным явлением и объясняется одновременным воздействием множества неконтролируемых, слабо влияющих факторов. Но порой в общем массиве опытных данных появляются некоторые числовые значения, резко отличающиеся от остальной массы значений по величине. Возникает подозрение, что эти значения являются не характерными для данных условий проведения эксперимента, что они не принадлежат рассматриваемой генеральной совокупности данных, а порождены некоторой другой генеральной совокупностью, характерной для других условий проведения эксперимента, т. е. они являются так называемыми «инородными» значениями. Такие значения могут появиться вследствие резкого изменения условий эксперимента, существенных ошибок проводимых измерений, неправильной записи результатов, ошибок передачи или прочтения записей и т. д. Ошибочные опытные данные могут существенно повлиять на окончательные результаты эксперимента, на выводы, полученные с использованием данных эксперимента, и по этой причине должны быть исключены из рассмотрения. Для идентификации сомнительных данных в целях принятия решения об их исключении или принятия решения о необходимости оставить их в выборке применяют специальные критерии. Они позволяют получить обоснованное заключение о принадлежности или непринадлежности сомнительных данных к рассматриваемой генеральной совокупности данных.

Известно достаточно большое количество статистических критериев, рекомендуемых для выявления инородных значений, например критерии Шовена, Ирвина, Груббса, Девида, Диксона, Смирнова, Роснера и др. [12]. Все известные критерии рассматриваемой направленности можно разделить на две группы:

- критерии для выявления одного выброса;
- критерии для выявления нескольких выбросов.

В металлургических экспериментах, связанных, как правило, с небольшими объемами выборок, наибольшее практическое значение имеют критерии из первой группы, поэтому в качестве примера для использования рассмотрим два критерия, рекомендованные для анализа результатов механических испытаний, повсеместно и регулярно используемых при анализе свойств металлургической продукции [15, 16].

Нулевой гипотезой при использовании таких критериев является предположение о том, что рассматриваемое опытное значение x_i принадлежит генеральной совокупности анализируемой случайной величины X, порождено этой совокупностью, т. е. не является инородным значением (ошибкой, выбросом и т. п.). Альтернативная гипотеза состоит в том, что рассматриваемое значение x_i является грубой ошибкой и не принадлежит генеральной совокупности:

1) H_0: $x_i \in X$;
2) H_1: $x_i \notin X$.

В качестве наиболее подозрительного значения x_i может выступать либо наибольшее, либо наименьшее значение из всей совокупности опытных значений (из имеющейся выборки). Причем первым на принадлежность генеральной совокупности следует проверить то значение x_i, которое отстоит наиболее далеко от эмпирического центра распределения, характеризуемого значением выборочного среднего арифметического $\bar{x}$:

$$x_i = \max\left\{\left(\max\left[x_1, x_2, ..., x_N\right] - \bar{x}\right), \left(\bar{x} - \min\left[x_1, x_2, ..., x_N\right]\right)\right\}.$$

Возможны две ситуации:

- когда для рассматриваемой случайной величины (а следовательно, и для полученной выборки опытных данных) известно значение генеральной дисперсии s^2;
- значение s^2 неизвестно, но по имеющейся выборке можно рассчитать ее оценку — выборочную дисперсию s^2. Рассмотрим каждую из этих ситуаций отдельно, несмотря на очевидную их аналогичность. В каждой из этих ситуаций применяются хотя и похожие, но все же разные критерии.

4.2.1. Критерий для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний при известной генеральной дисперсии (критерий Груббса)

Ситуация, когда известна генеральная дисперсия σ^2 и неизвестно математическое ожидание, встречается довольно часто. Как правило, она характерна для приемо-сдаточных испытаний, проводимых на предприятиях, занятых массовым выпуском однотипной продукции с использованием одной и той же технологии, оборудования, заготовки и прочими примерно одинаковыми условиями, в течение длительного периода времени. И даже если производимая продукция имеет различные номинальные характеристики (определяющие, прежде всего, различные значения математических ожиданий), дисперсия, определяемая комплексом перечисленных условий, остается примерно одинаковой.

Пример. Производится прокат одного вида, из одинаковой заготовки, на одном и том же прокатном стане, с различными, но близкими номинальными размерами. В такой ситуации для каждого типоразмера профиля центры рассеяния фактических размеров будут иметь различные значения, близкие по величине к соответствующим номинальным размерам. А колебания фактических размеров данного проката будут примерно одинаковыми. Такая ситуация зафиксирована, в частности, в стандартах на сортамент практически всех видов проката путем объединения близких типоразмеров в группы по величинам полей допусков (см., например, ГОСТ 19903–74, ГОСТ 19904–90, ГОСТ 2590–2006, ГОСТ 8240–97 и др.).

В условиях массового производства накапливаются огромные массивы опытных данных, пригодных для статистического анализа. Конечно, рассчитанная для таких данных дисперсия, по своей сути, остается выборочной, но если применяется наилучшая точечная оценка (эффективная, состоятельная и несмещенная), то с большой степенью надежности можно принять такую выборочную дисперсию, рассчитанную по огромной выборке, в качестве генеральной характеристики. Отличие в значениях будет небольшим. Использование генеральных значений является весьма привлекательным, т. к. позволяет существенно повысить надежность получаемых статистических выводов за счет уменьшения степени свободы применяемой статистики и появляющейся возможности использования более строгих статистических критериев.

Рассмотрим процедуру проверки сформулированной выше гипотезы относительно рассматриваемого подозрительного опытного значения x_i в соответствии с общим алгоритмом, приведенным выше:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $x_i \in X$ — гипотеза о том, что значение x_i принадлежит генеральной совокупности опытных данных X, а значит, его следует оставить в выборке.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: $x_i \notin X$ — гипотеза о том, что значение x_i не принадлежит генеральной совокупности опытных данных X, является инородным и его следует исключить из выборки.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. В качестве статистического критерия при известной генеральной дисперсии σ^2 следует использовать t-критерий [12, 14–16] (критерий Груббса [12], в ряде книг этот критерий называют t-критерий Н. В. Смирнова).

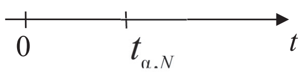
4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика t-критерия имеет вид

$$t = \left|\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right|, \tag{4.1}$$

где σ — генеральное стандартное отклонение (положительное значение корня квадратного из известной величины генеральной дисперсии σ^2).

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Границы критической области можно установить при помощи табличного критического значения этого критерия $t_{\alpha,N}$ [15] (прил. 9) для заданного заранее уровня значимости α и объема выборки N.

Получили такую ситуацию: положительные значения статистики t (рассматриваются только положительные значения t, т. к. в выражении (4.1) использован знак модуля, а σ положительно по определению) при помощи значения $t_{\alpha,N}$ разделены на две области, одна из которых является областью принятия нулевой гипотезы H_0, а вторая — критической областью.



С учетом возможности произвольного выбора нулевой и альтернативной гипотез в данном случае возникает вопрос: какая из областей (область принятия нулевой гипотезы или критическая область) расположена слева от границы $t_{\alpha,N}$, а какая справа? Данный вопрос связан с тем, что при смене нулевой и альтернативной гипотез на противоположные и области их принятия поменяются местами.

Поскольку аналогичная ситуация может встретиться и при проверке других статистических гипотез, то более подробно рассмотрим решение этого вопроса, используя достаточную простоту данного случая проверки гипотез.

Для решения вопроса о местоположении критической области можно использовать различные методы, начиная от простого использования материалов справочника и запоминания и заканчивая подробным анализом распределения, которому подчиняется используемая статистика. Рассмотрим пару таких методов.

Анализ теоретического распределения статистики

Выражение (4.2), используемое для расчета статистики t по своей сути очень близко к операции стандартизации (нормирования), рассмотренной в п. 2.4.3 (см. выражение (2.17) $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$). Отличие состоит лишь в использовании вместо математического ожидания μ его оценки $\bar{x}$ — выборочного среднего арифметического — и применении в статистике t знака модуля. Если стандартизации (см. формулу (2.17)) или преобразованию (4.1) подвергнуть одну и ту же нормально распределенную случайную величину X, то и характер распределений случайных величин U и t будет количественно отличаться, но качественно они похожи (t-распределение будет более растянуто вдоль оси фактора по сравнению с U-распределением). Имеющееся отличие в выражениях (2.17) и (4.1) определят следующие различия этих распределений:

- стандартизованная нормально распределенная случайная величина U не зависит от объема выборки N, т.к. при ее расчете используются только генеральные параметры распределения μ и σ (они рассчитываются для генеральной совокупности, поэтому от объема выборки не зависят), а при расчете случайной величины t использована генеральная величина σ и оценка математического ожидания — выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$, точность оценивания при помощи которого существенно зависит от объема используемой выборки N;
- использование модуля в выражении для t приводит к ликвидации области отрицательных значений, что приводит к тому, что распределение становится односторонним (рис. 4.2).

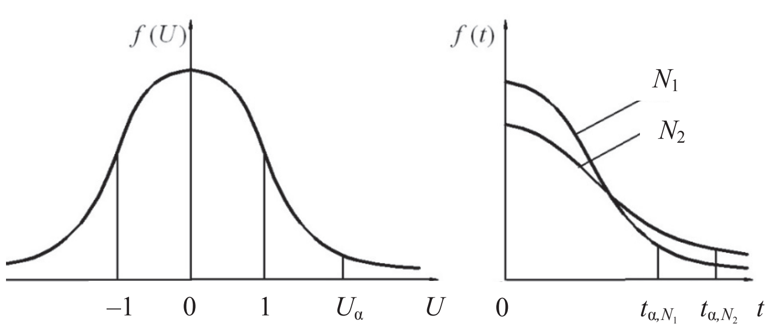


Рис. 4.2. Стандартизованный нормальный закон распределения (*а*) и распределение t-статистики (*б*)

Область наибольшей вероятности наблюдения значений стандартизованной нормально распределенной случайной величины U находится в центре распределения (в районе $U = 0$). Аналогично этому, область наиболее вероятных значений случайной величины t также находится в районе $t = 0$. В соответствии с выражением (4.1) этой области соответствуют значения x_i исходной случайной величины X близкие к центру распределения $\bar{x}$. В качестве нулевой гипотезы принята гипотеза о том, что x_i не является инородным значением, принадлежит генеральной совокупности X, а значит, имеет небольшое отклонение от центра распределения $\bar{x}$. Соответствующее значение статистики t для таких значений близко к нулю, т. е. находится слева от границы критической области $t_{\alpha,N}$. Следовательно, слева от границы $t_{\alpha,N}$ находится область принятия нулевой гипотезы, а справа — критическая область (рис. 4.3).

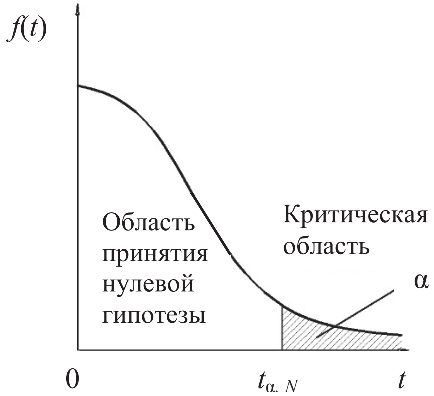


Рис. 4.3. Положение критической области при использовании t-критерия

Метод пробной точки

Данный метод является достаточно формальным эвристическим методом и может быть реализован в виде следующего алгоритма:

1. *Определение базовой гипотезы* $H_Б$. Обозначим термином «базовая гипотеза» гипотезу, принимаемую в качестве основы (базы) для рассуждений. Она нужна исключительно для использования рассматриваемого метода только лишь в целях установления местоположения критической области. В качестве базовой гипотезы принимают кон-

кретную гипотезу $H_Б = H_0$ или $H_Б = H_1$, с точки зрения метода это безразлично. Выбор той или иной гипотезы определяется исключительно предполагаемым удобством дальнейшего использования.

2. *Выбор пробной точки*. В качестве пробной точки $\Theta_{Пр}$ выбирают такие значения величин или понятий, используемых в нулевой и альтернативной гипотезах, которые на 100 % уверенности соответствовали бы базовой гипотезе $H_Б$. Часто в качестве значений пробной точки $\Theta_{Пр}$ удобно использовать некоторые «крайние» значения (типа $+\infty$, $-\infty$, 0 и т. п.), а также величины и их значения, непосредственно вытекающие из формулировки базовой гипотезы. Пробная точка — это фиктивная точка, необходимая лишь для установления местоположения критической области, в дальнейшем про нее «забывают».

3. *Расчет пробного значения статистики* $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$. Пробное значение статистики $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$ рассчитывается путем подстановки пробной точки $\Theta_{Пр}$ или напрямую связанных с ней значений (например, точечных оценок $\Theta_{Пр}$) в формулу для расчета статистики для проверки гипотез $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$из п. 4 основного алгоритма проверки гипотез (см. с. 141).

4. *Определение местоположения критической области*. Производится путем сравнения пробного значения статистики $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$ со значением границы критической области $\Psi_{Гр}(\alpha, N)$, определенной в п. 5 основного алгоритма. Область значений рассматриваемой статистики $\Psi(\Theta)$, в которую попало пробное значение статистики $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$, называют в соответствии с названием базовой гипотезы $H_Б$. Например, пробное значение статистики $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр})$ оказалось слева от границы (меньше численного значения границы, $\Psi_{Пр}(\Theta_{Пр}) \le \Psi_{Гр}(\alpha, N)$), а в качестве базовой гипотезы $H_Б$ принята нулевая гипотеза H_0 ($H_Б = H_0$), значит, слева от границы расположена область принятия нулевой гипотезы, а справа — критическая область.

Применим метод пробной точки для установления местоположения критической области в рассматриваемом случае выявления инородных значений, используя приведенный выше алгоритм:

1. *Определение базовой гипотезы*. Примем $H_Б = H_0$ $x_i \in X$.

2. *Выбор пробной точки*. Подозрительные на инородность опытные значения находятся по краям вариационного ряда опытных данных.

Поэтому в качестве пробной точки $\Theta_{\text{Пр}}$ выберем значение, находящееся в самом центре распределения опытных данных, а таким значением является выборочное среднее арифметическое $\bar{x}$: $x_i^{\text{Пр}} = \bar{x}$. Такая пробная точка на 100 % уверенности соответствует базовой гипотезе $H_{\text{Б}} = H_0$.

3. *Расчет пробного значения статистики*. Подставив $x_i^{\text{Пр}}$ в выражение для расчета статистики (4.1), получим

$$t_{\text{Пр}} = \left| \frac{x_i^{\text{Пр}} - \bar{x}}{\sigma} \right| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{x}}{\sigma} \right| = 0.$$

4. *Определение местоположения критической области*. Пробное значение статистики $t_{\text{Пр}} = 0$ меньше значения границы критической области $t_{\alpha, N}$ (прил. 9), т. е. располагается на числовой оси слева от границы $t_{\alpha, N}$. Поскольку в качестве базовой принята нулевая гипотеза $H_{\text{Б}} = H_0$, то слева от границы располагается область принятия нулевой гипотезы, а справа — критическая область (рис. 4.4).

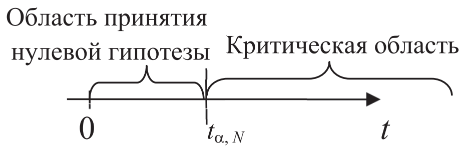


Рис. 4.4. Положение критической области, определенное по методу пробной точки

По рис. 4.3. и 4.4 видно, что использование этих двух методов дает один и тот же результат — при принятых нулевой и альтернативной гипотезах область принятия нулевой гипотезы расположена слева от границы, а критическая область — справа.

Определенным достоинством и практическим удобством применения метода пробной точки для определения положения критической области является его формализм. Нет необходимости глубоко погружаться в интересный, но не всегда простой мир теоретических распределений. Метод может оказаться весьма актуальным для практического использования в ситуациях, когда отсутствуют глубокие знания в области теоретической статистики. Известны, а также можно сформулировать и использовать другие способы определения местоположения критической области.

6. *Вывод* о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы (продолжение проверки нулевой гипотезы H_0: $x_i \le X$, начало см. на с. 146–147).

В случае выполнения неравенства $t \le t_{\alpha,\, N}$ статистика t, рассчитанная в п. 4.1, попадает в область принятия нулевой гипотезы. В этом случае результат испытаний x_i не следует считать выбросом и он должен учитываться, как и остальные (N–1) результатов, при проведении последующих статистических исследований. Для проверки выбиралось значение x_i, имеющее наибольшее отклонение от среднего арифметического для этой выборки $\bar{x}$, поэтому для остальных опытных значений данной выборки отклонение от центра распределения $|x_i - \bar{x}|$ будет меньше, а значит, и значение статистики (4.1) окажется также меньше, и соотношение $t \le t_{\alpha,\, N}$ для остальных значенийе будет справедливым. Поэтому нет смысла проверять другие значения этой выборки. Выборка цензурирована.

При справедливости соотношения $t > t_{\alpha,\, N}$ статистика t попадает в критическую область; результат испытаний x_i следует признать инородным, поэтому его следует исключить их рассмотрения. В этом случае найденная ранее оценка математического ожидания $\bar{x}$ должна быть скорректирована. После исключения одного из опытных значений в оставшейся части выборки могут быть и другие инородные значения, поэтому среди оставшихся значений следует вновь выбрать наиболее подозрительное x_i и вновь провести проверку, используя тот же алгоритм. Такую процедуру следует повторять вплоть до ситуации, когда окажется справедливым неравенство $t \le t_{\alpha,\, N}$.

4.2.2. Критерий для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний при неизвестной генеральной дисперсии

Данный критерий применяется для наиболее часто встречающегося случая, когда все генеральные характеристики рассматриваемой случайной величины неизвестны, а известны (или можно рассчитать по выборке) лишь их оценки s^2 и $\bar{x}$. Следует проверить принадлежность подозрительного результата испытаний x_i генеральной совокупности опытных данных. Данная статистическая ситуация очень близка к той, что рассматривалась выше в п. 4.2.1, поэтому рассмотрение используемого в этом случае критерия проведем аналогично, используя общий алгоритм, без излишних комментариев, т. к. в большинстве случаев они совпадут с комментариями, приведенными в п. 4.2.1.

Нулевую и альтернативную гипотезы примем прежними:

1. *Нулевая гипотеза* H_0: $x_i \in X$.

2. *Альтернативная гипотеза* H_1: $x_i \notin X$.

3. *Критерий для проверки* H_0. В качестве статистического критерия при неизвестной генеральной дисперсии σ^2, следуя рекомендациям [12, 15, 16], будем использовать U-критерий Н. В. Смирнова.

4. *Расчет статистики, относящейся к выбранному критерию*. Статистика U-критерия имеет вид

$$U = \left| \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right|, \tag{4.2}$$

где s — выборочное стандартное отклонение (положительное значение корня квадратного из величины выборочной дисперсии s^2, рассчитываемой по имеющейся выборке, подвергаемой статистическому анализу).

5. *Границы критической области и местоположение критической области*. Границу критической области можно установить при помощи критического значения $u_{\alpha,\,N}$, определенного из прил. 9 [15], для заданного уровня значимости α и объема выборки N. В таблице приведены значения $u_{\alpha,\,N}$ для $N \leqslant 25$, при $N > 25$ следует принимать $u_{\alpha,\,N} = t_{\alpha,\,N}$, приведенные в той же таблице.

Для установления местоположения критической области относительно границы $u_{\alpha,\,N}$ применим метод пробной точки, используя приведенный в п. 4.2.1 алгоритм, но для иллюстрации работы метода, в отличие от п. 4.2.1, в качестве базовой гипотезы будем использовать альтернативную гипотезу:

- определение базовой гипотезы: $H_{\text{Б}} = H_1$;
- выбор пробной точки. В качестве пробной точки $\Theta_{\text{Пр}}$ следует выбрать такое значение, которое со 100%-ной уверенностью удовлетворяло бы альтернативной гипотезе, т. е. такое значение, которое совершенно точно невозможно получить ни в одном эксперименте. В качестве такого пробного значения прекрасно подходит $x_i^{\text{Пр}} = +\infty$;

- расчет пробного значения статистики. Подставив $x_i^{\text{Пр}}$ в выражение для расчета статистики (4.2), получим

$$U_{\text{Пр}} = \left|\frac{x_i^{\text{Пр}} - \bar{x}}{s}\right| = \left|\frac{+\infty - \bar{x}}{s}\right| = +\infty;$$

- определение местоположения критической области. Пробное значение статистики $U_{Пр} = +\infty$ больше конечного значения границы критической области $u_{\alpha,\,N}$ (прил. 9), т.е. располагается на числовой оси справа от границы $u_{\alpha,\,N}$. Поскольку $H_{\text{Б}} = H_1$, то справа от границы располагается критическая область, а слева — область принятия нулевой гипотезы (рис. 4.5).

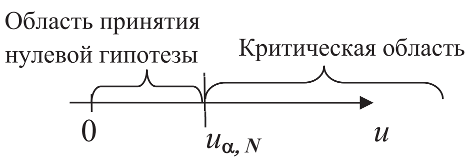


Рис. 4.5. Положение критической области при использовании U-критерия

По рис. 4.4. и 4.5 видно, что при одном и том же способе принятия H_0 и H_1 использование любой из этих гипотез в качестве базовой в методе пробной точки дает один и тот же результат: слева располагается область принятия нулевой гипотезы, а справа — критическая область.

6. *Вывод* о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы. Нулевая гипотеза отвергается при условии $U > u_{\alpha,N}$. В этом случае результат испытаний x_i следует признать инородным, исключить из рассмотрения, найденные ранее оценки математического ожидания $\bar{x}$, генеральной дисперсии s^2 и генерального стандартного отклонения s пересчитать для оставшейся части выборки и перейти к рассмотрению очередного подозрительного значения x_i, вплоть до ситуации, когда окажется справедливым неравенство $U > u_{\alpha,N}$.

4.3. Критерии равенства дисперсии случайных величин

Для лучшего понимания излагаемого ниже материала целесообразно сделать несколько предварительных замечаний о сути проверки гипотез относительно числовых характеристик случайных величин. Попытаемся ответить на вопрос: зачем при сравнении числовых характеристик случайных величин использовать гипотезы, почему нельзя проводить сравнение выборочных характеристик напрямую, без использования каких-то гипотез, опираясь на их числовые значения, рассчитанные по данным эксперимента?

Выборочные числовые характеристики случайных величин (такие как среднее арифметическое, выборочная дисперсия и т. п.) являются статистиками — рассчитываются с использованием выборочных опытных значений. Объем выборки, получаемой в ходе проведения эксперимента, обычно определяется сугубо субъективно, с учетом различных, как правило, неформализованных обстоятельств, таких как важность исследования, затраты на получение опытных данных, наличие априорной информации и т. п. Состав каждой выборки, получаемой в ходе проведения эксперимента, случаен, т. к. зависит от случайного в каждом опыте набора уровней неуправляемых и неконтролируемых факторов, влияющих на значение исследуемой случайной величины. Если по таким закономерно случайным по составу и закономерно субъективным по объему выборкам произвести расчет какой-то статистики (например, какой-то числовой характеристики), то эта статистика будет обладать теми же свойствами, что и ее основа — выборка. А именно такая статистика будет обладать случайной, вероятностной природой и определенным субъективизмом ограничения точности, связанным с субъективно ограниченным объемом выборки.

Часто эксперименты проводят в целях получения каких-то выводов, выработки заключений, принятия решений и т. п. Если для получения таких выводов использовать случайные по природе значения статистик напрямую, основываясь лишь на их числовых значениях, рассчитанных по случайной, ограниченной выборке, то и полученные выводы будут носить случайный вероятностный характер, и кроме того, субъективная природа статистик может предопределить субъективизм получаемых выводов и заключений.

Для получения объективных и детерминированных выводов необходимо использовать другой подход — использовать объективные и детерминированные характеристики анализируемых в эксперименте величин. Применительно к случайным величинам, характерным для экспериментальных исследований, такими объективными и детерминированными характеристиками являются генеральные характеристики этих величин и генеральные параметры распределений этих величин. Их и следует использовать для получения объективных выводов. Но проблема состоит в том, что для расчета генеральных характеристик и показателей необходимо использовать генеральные совокупности опытных данных. А в реальном эксперименте получать генеральные совокупности или практически невозможно, или практически бесполезно, а значит, и рассчитать генеральные числовые характеристики также не удастся. Возможно получать лишь выборки и рассчитывать по ним лишь выборочные характеристики случайных величин.

Для преодоления такого противоречия между практически возможным и желаемым используют механизм проверки статистических гипотез относительно параметров распределения и числовых характеристик случайных величин. Поступают так: для устранения субъективизма и воли случая нулевую и альтернативную гипотезы формулируют с использованием объективных и детерминированных генеральных показателей. А для получения возможности учитывать фактический материал (опытные данные в виде выборки) используют подходящую статистику, рассчитываемую по экспериментально полученной выборке. Противоречие между субъективизмом и вероятностным характером статистик и объективизмом и детерминированностью гипотез разрешают, сглаживают за счет использования подходящего статистического критерия. В данном контексте статистический критерий можно рассматривать как некое правило, способ, позволяющий на основе случайной и субъективной информации получать объективный и однозначный вывод. В этом и состоит одно из главных, основных достоинств метода проверки статистических гипотез по сравнению, например, с близким по сути и природе методом построения и использования интервальных оценок. Однако, как указывалось выше, такой объективный по природе вывод будет иметь и вероятностное содержание — будет гарантированно справедлив не менее чем в $(1-\alpha)\cdot 100\%$ случаев (α — принятый уровень значимости). Но поскольку при проверке гипотез α принимают малым (0,05 и менее), то такой степени уверенности вполне хватает для практических целей.

Статистические гипотезы можно сформулировать относительно любых свойств, генеральных характеристик или генеральных параметров распределения случайной величины, но наибольшее практическое значение имеют гипотезы относительно выделенных нами выше основных генеральных числовых характеристик — математических ожиданий и генеральных дисперсий.

В ряде случаев проверки гипотез о математических ожиданиях, для выбора подходящего критерия проверки, необходима информация о равенстве или неравенстве генеральных дисперсий рассматриваемых случайных величин. Поэтому начнем именно с формирования и проверки гипотез о дисперсиях.

Гипотезы о равенстве (или неравенстве) дисперсий исследуемых случайных величин имеют большое значение в технике и технологии, т. к. характеризуемая дисперсией величина разброса, рассеяния описывает такие исключительно важные технические и технологические показатели, как точность работы машин, приборов, стабильность технологических процессов, показателей качества, стабильности готовой продукции и т. п. Поэтому часто о стабильности или качестве выпускаемой продукции, преимуществах той или иной машины, станка, инструмента или технологии можно судить по результатам сравнения дисперсий.

Возможно несколько вариантов сравнения дисперсий, имеющих практический смысл:

- сравнение неизвестной генеральной дисперсии с известной генеральной дисперсией (или известным числовым значением);
- сравнение двух неизвестных генеральных дисперсий;
- сравнение нескольких неизвестных генеральных дисперсий в их совокупности.

Каждый из этих вариантов сравнения гипотез имеет свое практическое содержание и смысловое наполнение, использует свои критерии проверки, поэтому целесообразно рассмотреть их отдельно, несмотря на определенную общность используемых величин и подходов.

4.3.1. Сравнение неизвестной генеральной дисперсии с известным числовым значением

Пусть получена выборка объемом N опытных значений некоторой случайной величины X с нормальным законом распределения, с неизвестными параметрами и неизвестными генеральными числовыми характеристиками. С помощью данных выборки рассчитана выборочная дисперсия s^2, являющаяся оценкой для неизвестной генеральной дисперсии σ^2. Поставлена задача — сравнить неизвестную генеральную дисперсию σ^2 с известным числовым значением σ_0^2.

В качестве такого известного числового значения σ_0^2, применяемого для сравнения, может выступать как известная генеральная дисперсия σ_0^2, так и числовое значение, заданное, например, в некотором нормативном документе. И хотя с фактической стороны эти два случая могут носить ярко выраженные отличия, с точки зрения самого механизма формирования и проверки гипотез (с точки зрения математики) различия нет.

Пример. Достаточно распространена такая ситуация. На постоянно действующем серийном производстве часто накапливаются большие объемы фактического материала, позволяющего с высокой точностью оценить генеральную дисперсию некоторой характеристики этого производства или его продукта значением выборочной дисперсии s_0^2. При очень большом объеме использованных опытных данных (при очень большой выборке) выборочное по своей сути значение дисперсии s_0^2 вполне можно принять за известное значение генеральной дисперсии σ_0^2. Пусть, например, произведено какое-то изменение в технологии производства, или использована другая заготовка, или произведено какое-то другое изменение, способное повлиять на стабильность рассматриваемой характеристики. После проведенных изменений при использовании этого нового варианта производства получена новая выборка исследуемой величины X объемом N. По данным этой выборки вычислена оценка дисперсии этой совокупности s^2. Требуется проверить предположение, повлияло ли использованное изменение на стабильность рассматриваемой характеристики производства, т. е. на значение генеральной дисперсии σ^2 этой характеристики производства.

Решение такой задачи заключается в сравнении неизвестной генеральной дисперсии σ^2, оцененной по полученной выборке с помощью выборочной дисперсии s^2, с известным значением σ_0^2. Если значения старой и новой дисперсий совпадают ($\sigma^2 = \sigma_0^2$), значит, произведенные изменения не сказались на стабильности процесса производства. А если это равенство не выполняется, то можно получить вывод о характере влияния произведенных изменений — улучшение или ухудшение стабильности. Причем следует подчеркнуть, что полученный вывод может обладать достаточно высокой степенью достоверности (в зависимости от принятого или рассчитанного уровня значимости α).

Рассмотрим процедуру проверки в соответствии с общим алгоритмом, использованном ранее (см. п. 4.2.1 и 4.2.2):

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ — гипотеза о том, что значение неизвестной генеральной дисперсии σ^2 анализируемой случайной величины X равно известному числовому значению σ_0^2 (или по величине совпадает с величиной известной генеральной дисперсии σ_0^2**)**.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: альтернативная гипотеза может быть сформулирована в одном из трех следующих вариантов: а) $\sigma^2 < \sigma_0^2$; б) $\sigma^2 > \sigma_0^2$; в) $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Важно отметить, что при решении конкретной задачи для конкретной ситуации, с конкретными цифрами из этих вариантов альтернативной гипотезы для практического использования следует выбрать только один вариант. Выбор наиболее подходящего варианта H_1 может быть произведен или в соответствии с общей логикой решаемой задачи, или как наиболее правдоподобный вариант, следующий из сравнения числовых значений σ_0^2 и s^2.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходной случайной величины X проверка нулевой гипотезы производится с использованием χ^2-критерия [12], [14—19].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика χ^2-критерия для данного случая (сравнение известной и неизвестной генеральных дисперсий) имеет вид

$$\chi^2 = \frac{s^2}{\sigma_0^2}(N-1). \tag{4.3}$$

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu = N-1$ следует определять как квантиль распределения Пирсона $\chi^2_{\alpha,\nu}$ (прил. 6) в зависимости от вида выбранной альтернативной гипотезы. Используя график плотности распределения Пирсона, можно рассуждать следующим образом.

При альтернативной гипотезе $\sigma^2 < \sigma_0^2$ смещение статистики σ^2 (4.4) от центра распределения $\nu = N-1$ происходит влево, в сторону меньших значений, как это показано на рис. 4.6. Это следует, например, из таких рассуждений. Выборочная дисперсия s^2 является оценкой для генеральной дисперсии σ^2, а значит, между ними справедливо соотношение $s^2 \approx \sigma^2$. Если подставить это приближенное равенство в альтернативную гипотезу $\sigma^2 < \sigma_0^2$, то получим $s^2 < \sigma_0^2$. А значит, в уравнении статистики (4.3) отношение $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ меньше 1 и значение $\sigma^2 < (N\text{-}1)$, т. е. статистика σ^2 смещена от центра распределения $\nu = N-1$ влево. Нулевую гипотезу следует отвергнуть в том случае, если смещение статистики σ^2 влево превысит определенную критическую величину $\chi^2_{1-\alpha/\nu}$ (рис. 4.6).

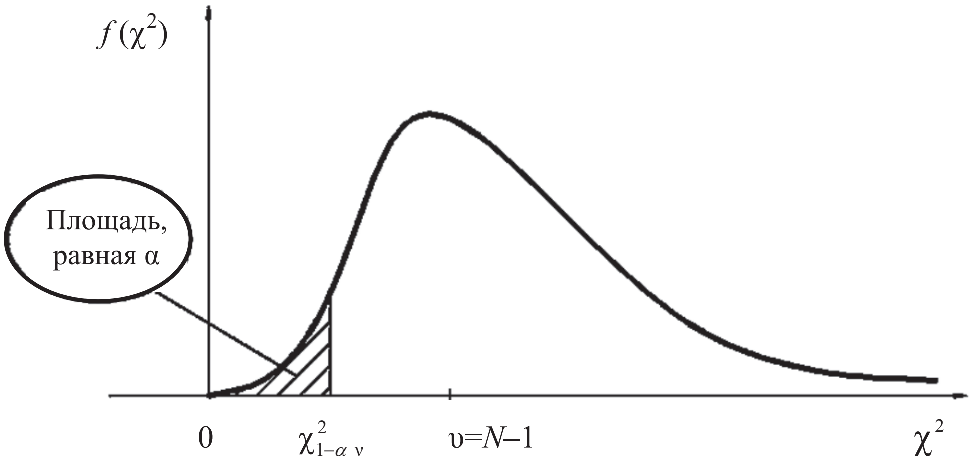


Рис. 4.6. Левосторонняя критическая область на распределении Пирсона при использовании альтернативной гипотезы $\sigma^2 < \sigma_0^2$

При альтернативной гипотезе $\sigma^2 > \sigma_0^2$, в противоположность к случаю $\sigma^2 < \sigma_0^2$, рассматривается возможность смещения статистики σ^2 от центра распределения $\nu = N - 1$ вправо, в сторону больших значений, что следует из аналогичных рассуждений ($s^2 \approx \sigma^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$, $s^2 > \sigma_0^2$, $\frac{s^2}{\sigma_0^2} > 1$, $\sigma^2 > (N\text{-}1)$). Нулевую гипотезу следует отвергнуть в том случае, если смещение статистики σ^2 вправо превысит критическую величину $\chi^2_{\alpha,\nu}$ (рис. 4.7).

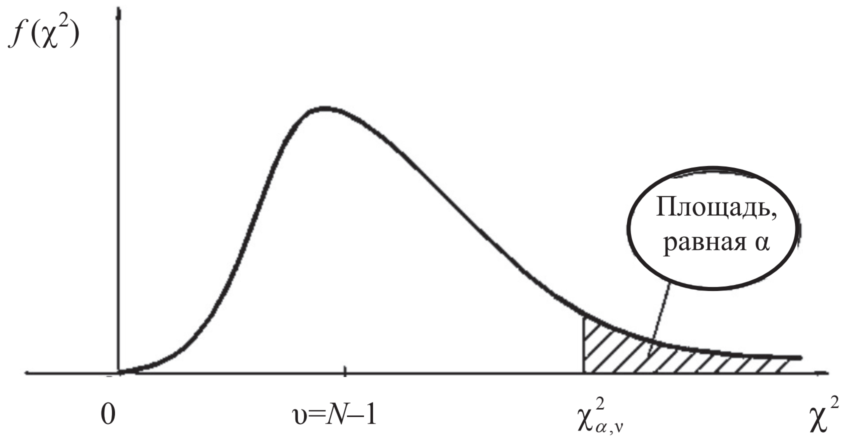


Рис. 4.7. Правосторонняя критическая область на распределении Пирсона при использовании альтернативной гипотезы $\sigma^2 > \sigma_0^2$

При альтернативной гипотезе $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ смещение статистики σ^2 от центра распределения $\nu = N - 1$ может происходить как влево, так и вправо, т. е. в сторону как больших, так и меньших значений. Поэтому необходимо использовать двустороннюю критическую область и соответственно определять две границы критической области. Для определения этих границ в большинстве случаев общий уровень значимости α, определяющий вероятность ошибки первого рода, делят на две равные половины. По таблице прил. 6 следует определить два квантиля: левый $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ и правый $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$. Область принятия нулевой гипотезы находится между этими границами, как это показано на рис. 4.8.

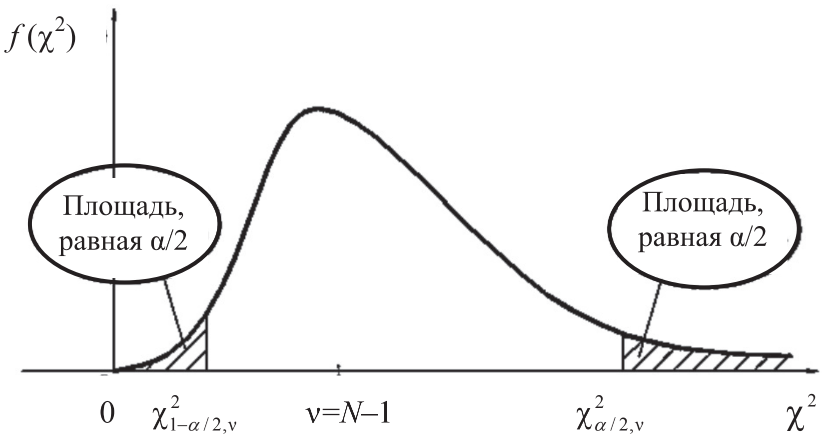


Рис. 4.8. Двусторонняя критическая область на распределении Пирсона при использовании альтернативной гипотезы $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 известному числовому значению σ_0^2 или известной генеральной дисперсии σ_0^2 принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1 $\quad \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,\nu}$;

б) при H_1 $\quad \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,\nu}$;

в) при H_1 $\quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \chi^2_{\alpha/2,\nu} < \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$.

4.3.2. Сравнение двух неизвестных генеральных дисперсий

Пусть по результатам независимых испытаний двух нормально распределенных случайных величин X и Y получены выборки объемами N_x и N_y соответственно. На основе данных этих выборок рассчитаны выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2, являющиеся оценками для неизвестных генеральных дисперсии σ_x^2 и σ_y^2. Поставлена задача: сравнить эти две неизвестные генеральные дисперсии друг с другом. Сравнение проводится путем проверки нулевой гипотезы о равенстве рассматриваемых генеральных дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

Частным случаем такой задачи может быть одна из составляющих общей задачи проверки принадлежности двух выборок одной и той же генеральной совокупности, т. е. проверки того, что обе выборки представляют собой частные реализации одной и той же случайной величины. В этом случае для имеющихся выборок с объемами N_1 и N_2 можно рассчитать выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2, являющиеся оценками для аналогичных неизвестных генеральных дисперсий σ_1^2 и σ_2^2. Для этого частного случая проводится проверка аналогичной гипотезы $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Рассмотрим процедуру проверки гипотез в соответствии с общим алгоритмом, изложенным в п. 4, с. 141:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ — гипотеза о том, что значения неизвестных генеральных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 анализируемых случайных величин X и Y равны.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: альтернативная гипотеза может быть сформулирована в одном из двух следующих вариантов:

а) $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$; б) $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Гипотезу $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$ не рассматривают. Для исключения этой гипотезы вводят дополнительное ограничение на используемые выборочные дисперсии, принимая условие $s_x^2 \geq s_y^2$. Если окажется, что в исходных данных это условие не выполнено, то наиболее простым выходом является смена индексов у рассматриваемых величин (для использования изложенного ниже материала без изменений).

При решении конкретной задачи из этих двух вариантов альтернативной гипотезы для практического использования следует выбрать только один вариант, отвечающий наилучшим образом поставленной в задаче цели.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходных случайных величин X и Y проверка нулевой гипотезы проводится с использованием F-критерия (критерия Фишера) [12], [14–19].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика F-критерия имеет вид

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2},\ s_x^2 \geq s_y^2. \tag{4.4}$$

Принятое ранее условие $s_x^2 \geq s_y^2$ приводит к тому, что F-статистика смещается по числовой оси F от центра распределения $F \approx 1$ вправо, в сторону больших значений. Вследствие значительной асимметричности распределения Фишера использование ограничения $s_x^2 \geq s_y^2$ приводит к существенному повышению мощности F-критерия [8, 10].

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α следует определять как квантиль распределения Фишера F_{α,ν_1,ν_2} для чисел степеней свободы ν_x и ν_y, где ν_x — число степеней свободы, использованной при расчете выборочной дисперсии s_x^2 (стоящей в числителе выражения (4.4)), $\nu_x = N_x - 1$; ν_y — число степеней свободы для выборочной дисперсии s_y^2 (стоящей в знаменателе выражения (4.4)), $\nu_y = N_y - 1$. Значение F_{α,ν_1,ν_2} можно определить по одной из таблиц прил. 8. При этом надо учитывать вид выбранной альтернативной гипотезы.

При альтернативной гипотезе $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$ по одной из таблиц определяют значение F_{α,ν_x,ν_y}.

При альтернативной гипотезе $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ используется двусторонняя критическая область. За счет введения ограничения $s_x^2 \geq s_y^2$ смещение F-статистики от центра распределения влево, в область меньших значений F, невозможно, поэтому по таблицам достаточно определить лишь правую границу критической области $F_{\alpha/2,\nu_x,\nu_y}$. Но поскольку формально критическая область двусторонняя, то для нахождения этого квантиля используется половинный уровень значимости $\alpha/2$ (рис. 4.9).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1: $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$ должно выполняться неравенство $F \leq F_{\alpha,\nu_x,\nu_y}$;

б) при H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ должно выполняться неравенство $F \leq F_{\alpha/2,\nu_x,\nu_y}$

Недостатком использованного выше критерия Фишера является его очень высокая чувствительность к нормальности закона распределения. Если эмпирический закон распределения рассматриваемой случайной величины достаточно существенно отличается от теоретического нормального закона распределения, то для повышения устойчивости критерия Фишера рекомендуют [12] произвести корректировку чисел степеней свободы согласно следующим выражениям:

$$b=\left(N_x+N_y\right)\frac{\sum_{i=1}^{N_x}\left(x_i-\bar{x}\right)^4+\sum_{i=1}^{N_y}\left(y_i-\bar{y}\right)^4}{\left(\sum_{i=1}^{N_x}\left(x_i-\bar{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{N_y}\left(y_i-\bar{x}\right)^2\right)^2};$$

$$d=\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{N_x+N_y-4}{N_x+N_y-}\right)\left(b-3\right)\right)^{-1};$$

$$\nu'_x=\nu_x d;\ \nu'_y=\nu_y b.$$

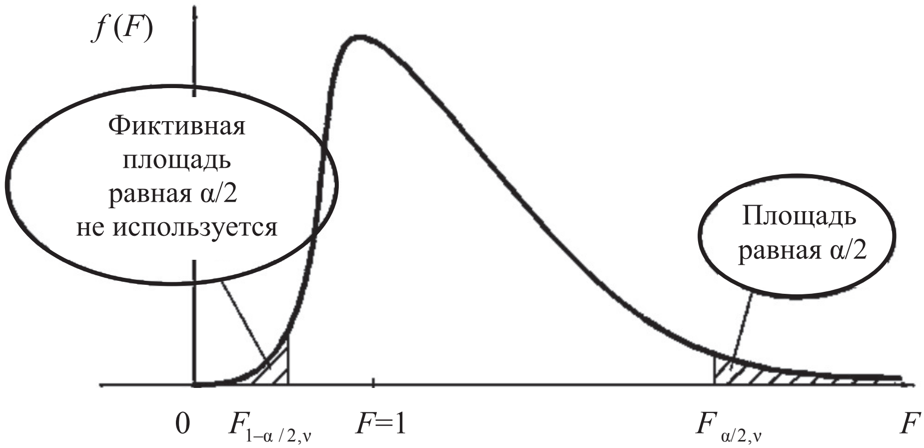


Рис. 4.9. Двусторонняя критическая область на распределении Фишера при использовании альтернативной гипотезы $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

В случае подтверждения нулевой гипотезы и наличия дополнительных оснований полагать, что обе исходные выборки принадлежат одной генеральной совокупности, по двум выборочным дисперсиям s_1^2 и s_2^2 можно получить более точную оценку общей для этих выборок генеральной дисперсии σ^2

$$s^2=\frac{s_x^2\left(N_x-1\right)+s_y^2\left(N_y-1\right)}{N_x+N_y-2}, \tag{4.5}$$

которая может быть использована для дальнейшего анализа опытных данных. Точность такой оценки будет повышена за счет использования при ее расчете выборки большего объема $N = N_x + N_y$.

4.3.3. Сравнение нескольких неизвестных генеральных дисперсий

Пусть по независимым выборкам объемами $N_1, N_2, ..., N_k$ рассчитаны выборочные дисперсии $s_1^2, s_2^2, ..., s_k^2$, являющиеся оценками для соответствующих генеральных дисперсий $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_k^2$. Поставлена задача проверки равенства этих неизвестных генеральных дисперсий. Такая постановка соответствует двум практическим задачам: 1) простое сравнение генеральных дисперсий ряда случайных величин (или ряда генеральных совокупностей, каждая из которых порождает соответствующую рассматриваемую выборку); 2) постановка рассматривается как одна из составляющих общей процедуры проверки однородности нескольких выборок (принадлежности рассматриваемых выборок к одной и той же генеральной совокупности). Обе эти в сущности различные задачи решаются одинаково за счет общей математической трактовки.

В экспериментальной практике возможны два случая:

1) полученные выборки опытных значений имеют разный объем ($N_i \neq N_j$, $i, j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$);

2) объемы выборок равны ($N_1 = N_2 = ... = N_k = N$). Для проверки гипотезы о равенстве нескольких генеральных дисперсий в этих случаях применяют разные статистические критерии. Рассмотрим их отдельно.

Сравнение нескольких неизвестных генеральных дисперсий при различных объемах выборок. Критерий Бартлетта

Рекомендуется к использованию при различных объемах выборок, но когда минимальный объем выборки не менее 5 измерений ($N_i \geq 5$, $i = 1, 2, \ldots, k$).

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ...= \sigma_k^2$ – гипотеза о том, что неизвестные генеральные дисперсии рассматриваемых k

случайных величин равны (или второй возможный на практике вариант — гипотеза о том, что анализируемые выборки однородны по дисперсиям).

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* $H_1\colon \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ — гипотеза о том, что генеральные дисперсии некоторых (а возможно, и всех) рассматриваемых случайных величин различны (или второй возможный вариант — гипотеза о том, что анализируемые выборки не однородны по признаку рассеяния опытных данных).

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для нормально распределенных случайных величин, образующих рассматриваемые выборки, в качестве статистического критерия в наиболее общем случае разночисленности наблюдений в выборках рекомендуется использовать критерий Бартлетта [12], [15–18] и др.

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*:

$$\chi^2 = M\left\{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N_i - 1} - \frac{1}{N}\right)\right\}^{-1}, \tag{4.6}$$

где $M = N\ln\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(N_i - 1)s_i^2\right\} - \sum_{i=1}^{k}(N_i - 1)\ln s_i^2,$

$$N = \sum_{i=1}^{k}(N_i - 1). \tag{4.7}$$

5. *Находим границы критической области*. Граница критической области критерия Бартлетта определяется как квантиль распределения Пирсона $\chi^2_{\alpha,\nu}$ (прил. 6) для заданного заранее уровня значимости α и числа степеней свободы $\nu = k - 1$.

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. В случае выполнения неравенства $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,\nu}$ статистика χ^2, рассчитанная в п. 4.1, попадает в область принятия нулевой гипотезы и в зависимости от сути решаемой задачи неизвестные генеральные дисперсии рассматриваемых k случайных величин считаются равными $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ (или второй возможный вариант — справедлива гипотеза о том, что анализируемые выборки однородны по дисперсиям).

Недостатком критерия Бартлетта является его очень сильная чувствительность к нормальности законов распределения рассматриваемых случайных величин. При отклонении от нормальности рекомендуется использовать модифицированный критерий Бартлетта [20, 21].

Статистикой модифицированного критерия Бартлетта является величина

$$F = \frac{\nu_2 M}{\nu_1 (b - M)}, \tag{4.8}$$

где M — величина, рассчитываемая по выражению (4.6).

Для упрощения расчета в формулу (4.8) были введены независимые следующие параметры:

$$\nu_1 = k - 1; \tag{4.9}$$

$$\nu_2 = \frac{k+1}{(c-1)^2}; \tag{4.10}$$

$$b = \frac{\nu_2^2}{\nu_2 (2 - c) + c}$$

(здесь $c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N_i - 1} - \frac{1}{N} \right)$);

N — величина, рассчитываемая по выражению (4.9).

F-статистика (4.8) подчиняется распределению Фишера с ν_1 и ν_2 числами степеней свободы при ν_1, рассчитываемому по выражению (4.9) и ν_2, рассчитываемому по выражению (4.10). При заданном уровне значимости α квантиль распределения Фишера F_{α,ν_1,ν_2} можно определить по таблицам в прил. 8.

Нулевую гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ отвергают в случае, если нарушается условие $F \le F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$.

Сравнение нескольких неизвестных генеральных дисперсий при одинаковых объемах выборок. Критерий Кохрана

Критерий Кохрана (Cochran W. G., в русскоязычной литературе по статистическим методам можно встретить написание этой фамилии как Кочрен и Кохрен) используется при равных объемах всех k выборок $N_1 = N_2 = \ldots = N_k = N$.

1. ***Формулируем нулевую гипотезу*** H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ — гипотеза о том, что неизвестные генеральные дисперсии рассматриваемых k случай-

ных величин равны (или второй возможный вариант — гипотеза о том, что анализируемые выборки однородны по дисперсиям).

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* $H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ — гипотеза о том, что генеральные дисперсии некоторых (а возможно, и всех) рассматриваемых случайных величин различны (или второй возможный вариант — гипотеза о том, что анализируемые выборки неоднородны по признаку рассеяния опытных данных).

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для нормально распределенных случайных величин, образующих рассматриваемые выборки, в качестве статистического критерия в случае равночисленных наблюдений рекомендуется использовать критерий Кохрана [12], [15–18].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*:

$$G_{\max} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{k} s_i^2},$$

где $s_{\max}^2$ — выборочная дисперсия с максимальным значением из всех рассчитанных выборочных дисперсий s_i^2, $i = 1, 2, \ldots, k$.

5. *Находим границы критической области*. Границу критической области критерия Кохрана $G_{\alpha,k,N}$ (где α — заданный уровень значимости) можно определить по справочным таблицам, приведенным, например, в [12, 15]. В прил. 10 приведена таблица, позволяющая определить значения границы критической области критерия $G_{\alpha,k,N}$ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$.

Приближенное значение $G_{\alpha,k,N}$ можно рассчитать по выражению, увеличивающему точность расчета с увеличением k и N:

$$G_{\alpha,k,N} = \frac{F_{\alpha_1,\nu_1,\nu_2}}{k-1+F_{\alpha_1,\nu_1,\nu_2}},$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{k}; \tag{4.11}$$

$$\nu_1 = N-1,\ \nu_2 = (N-1)(k-1), \tag{4.12}$$

где F_{α_1,ν_1,ν_2} и F_{α_2,ν_1,ν_2} — квантили распределения Фишера, которые можно определить по таблицам (прил. 8) при соответствующем уровне значимости зависимости α_1, рассчитанному по выражению (4.11) и числах степеней свободы ν_1 и ν_2, определяемых по выражениям (4.12).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевая гипотеза $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ принимается, если выполняется неравенство $G_{\max} \le G_{\alpha,k,N}$.

В случае подтверждения нулевой гипотезы об однородности рассматриваемых дисперсий и имея дополнительные основания полагать, что все рассматриваемые выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, по k выборочным дисперсиям $s_1^2 = s_2^2 = \ldots = s_k^2$ можно получить более точную оценку генеральной дисперсии s^2 общей для всех выборок (для общей генеральной совокупности), используя опытные данные всех имеющихся выборок по выражению

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (N_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^{k} (N_i - 1)}.$$

4.4. Критерии равенства математических ожиданий случайных величин

Математическое ожидание характеризует объективное среднее значение генеральной совокупности случайной величины, причем с учетом различной вероятности наблюдения различных значений этой величины (математическое ожидание — средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины). Поэтому проверка гипотез о равенстве (или неравенстве) математических ожиданий имеют большое практическое значение, в т. ч. в технике и технологии. Сравнение математических ожиданий используют для решения вопроса о соответствии произведенной продукции определенным требованиям (например, требованиям ГОСТов или ТУ) при выявлении преимущества того или иного технологического процесса, оборудования или нового материала и т. п.

Однако в большинстве случаев математические ожидания неизвестны из-за невозможности или нецелесообразности получения генеральной совокупности опытных данных. На практике математические ожидания могут быть только оценены (определены приблизительно) при помощи или точечной оценки (среднего арифметического), или интервальной оценки (доверительного интервала). Возникает ситуация с желательностью, но практической невозможностью использовать напрямую объективные (генеральные) характеристики — математические ожидания для получения выводов, аналогичная ситуации, подробно рассмотренной в подглаве 4.2 применительно к дисперсиям. Выходом из описанных в подглаве 4.2 противоречий является использование механизма проверки статистических гипотез.

Как и для рассмотренного выше случая сравнения генеральных дисперсий (см. подглаву 4.2.), при использовании математических ожиданий также возможно несколько вариантов решаемых практических задач: 1) сравнение неизвестного математического ожидания μ с конкретным заданным числовым значением μ_0 или с известным математическим ожиданием μ_0 (математически эти задачи решаются одинаково); 2) сравнения двух неизвестных математических ожиданий; 3) сравнение нескольких неизвестных математических ожиданий. Остановимся на только первых 2 вариантах постановки и решения задач. Третий возможный случай (сравнение нескольких математических ожиданий) выделяют отдельно и называют дисперсионным анализом. Он имеет свою специфику как трактовки, так и решения, поэтому здесь рассматриваться не будет.

4.4.1. Сравнение неизвестного математического ожидания с известным числовым значением

Пусть получена выборка объемом N опытных значений некоторой случайной величины X с нормальным законом распределения, с неизвестными параметрами и неизвестными генеральными числовыми характеристиками. На основе данных выборки рассчитано среднее арифметическое $\bar{x}$, являющееся оценкой для неизвестного математического ожидания μ. Поставлена задача: сравнить это математическое ожидание с известным числовым значением μ_0.

В качестве числового значения μ_0, применяемого для сравнения, может выступать как какое-то известное математическое ожидание μ_0 для некоторой случайной величины, так и известное числовое значение, заданное, например, в некотором нормативном документе. И хотя с фактической стороны эти два случая могут носить ярко выраженные отличия, с точки зрения самого механизма формирования и проверки гипотез (с точки зрения математики) различия нет.

Пример. Достаточно распространена такая ситуация. На постоянно действующем серийном производстве часто накапливаются большие объемы фактического материала, позволяющего с высокой точностью оценить математическое ожидание некоторой характеристики этого производства или его продукта с помощью значения среднего арифметического $\bar{x}$. При очень большом объеме использованных опытных данных (при очень большой выборке) выборочное по своей сути значение среднего арифметического $\bar{x}_0$ вполне можно принять за известное значение математического ожидания μ_0. Пусть, например, произведено какое-то изменение в технологии производства, или использована другая заготовка, или произведено какое-то другое изменение, способное повлиять на усредненное значение анализируемой характеристики. После проведенных изменений этого нового варианта производства получена новая выборка исследуемой величины X объемом N. По данным этой выборки вычислено новое среднее арифметическое $\bar{x}_0$. Требуется проверить предположение: повлияло ли произведенное изменение на значение объективного среднего рассматриваемой характеристики производства, т. е. на значение математического ожидания μ этой характеристики производства? Решение такой задачи заключается в сравнении неизвестного математического ожидания μ, оцененного по полученной выборке значением среднего арифметического $\bar{x}$, с известным значением μ_0. Если значения старого и нового математических ожиданий совпадают ($\mu = \mu_0$), значит, произведенные изменения не сказались на усредненных характеристиках процесса производства. А если это равенство не выполняется, то можно сделать вывод и о характере влияния произведенных изменений — уменьшилось или увеличилось значение рассматриваемой характеристики X в среднем. Причем полученный вывод может обладать достаточно высокой степенью достоверности (в зависимости от принятого или рассчитанного уровня значимости α).

В рассматриваемом случае (сравнение неизвестного математического ожидания с известным числом) различают два близких варианта проверки гипотез, отличающихся применяемыми статистическими критериями — при известной и при неизвестной генеральной дисперсии σ^2.

Рассмотрим процедуры проверки этих вариантов отдельно, используя общий алгоритмом, использованный ранее.

Сравним неизвестное математическое ожидание с известным числовым значением при известной генеральной дисперсии σ^2:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\mu = \mu_0$ — гипотеза о том, что значение неизвестного математического ожидания μ анализируемой случайной величины X равно известному числовому значению μ_0 (или по величине совпадает с величиной известного математического ожидания μ_0).

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: альтернативная гипотеза может быть сформулирована в одном из трех следующих вариантов:

а) $\mu < \mu_0$; б) $\mu > \mu_0$; в) $\mu \neq \mu_0$.

Важно отметить, что при решении конкретной задачи с конкретными цифрами, из этих вариантов альтернативной гипотезы для практического использования следует выбрать только один вариант. Выбор конкретного варианта H_1 может быть произведен или в соответствии с общей логикой решаемой задачи, или как наиболее правдоподобный вариант, следующий из сравнения числовых значений $\bar{x}$ и μ_0.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходной случайной величины X при известной генеральной дисперсии проверка нулевой гипотезы производится с использованием U-критерия [14–19].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика U-критерия для данного случая имеет вид

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}, \tag{4.13}$$

где σ — генеральное стандартное отклонение (положительный квадратный корень из известной генеральной дисперсии $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$).

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α (или доверительной вероятности $\bar{p} = 1 - \alpha$) следует определять как квантиль стандартизованного нормального закона распределения U_p по прил. 5 в зависимости от вида выбранной альтернативной гипотезы следующим образом.

При альтернативной гипотезе $\mu < \mu_0$ статистика U (см. формулу (4.13)) смещается от центра распределения $U = 0$ влево, в сторону отрицательных значений, что вытекает из следующего. Среднее арифметическое $\bar{x}$ является оценкой для неизвестного математического ожидания μ, а значит, между ними справедливо соотношение $\bar{x} \approx \mu$. Если подставить это приближенное равенство в выражение альтернативной гипотезы $\mu < \mu_0$, то получим $\bar{x} < \mu_0$, а значит, в статистике (4.13) числитель $(\bar{x} - \mu)$ меньше 0. Поскольку все величины в знаменателе положительные, то вся дробь $U < 0$, т. е. смещена от центра распределения влево. Нулевую гипотезу следует отвергнуть в том случае, если смещение статистики U влево превысит критическую величину $U_{p_1=\alpha}$ (рис. 4.10).

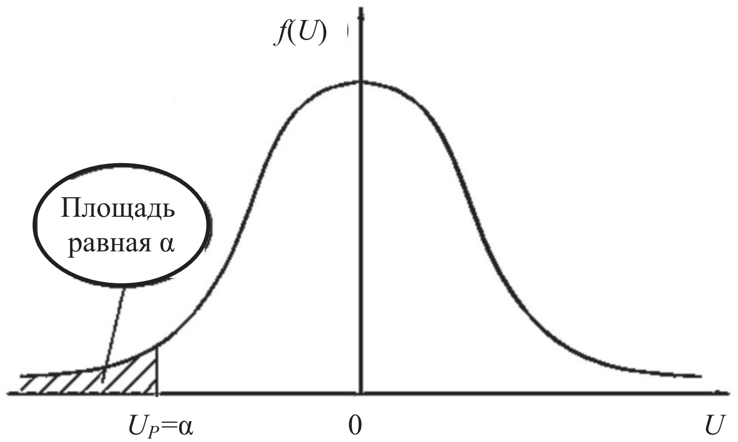


Рис. 4.10. Левосторонняя критическая область на стандартизованном нормальном законе распределения при использовании альтернативной гипотезы $\mu < \mu_0$

При альтернативной гипотезе $\mu > \mu_0$, в противоположность к рассмотренному случаю, смещение статистики U (см. формулу (4.13)) от центра распределения $U = 0$ происходит вправо, в сторону положительных значений, что следует из аналогичных рассуждений ($\bar{x} \approx \mu$, $\mu > \mu_0$, $\bar{x} > \mu_0$, $\bar{x} - \mu_0 > 0$, $U > 0$). Нулевую гипотезу следует отвергнуть в том случае, если смещение статистики U вправо превысит критическую величину $U_{p_2=1-\alpha}$ (рис. 4.11).

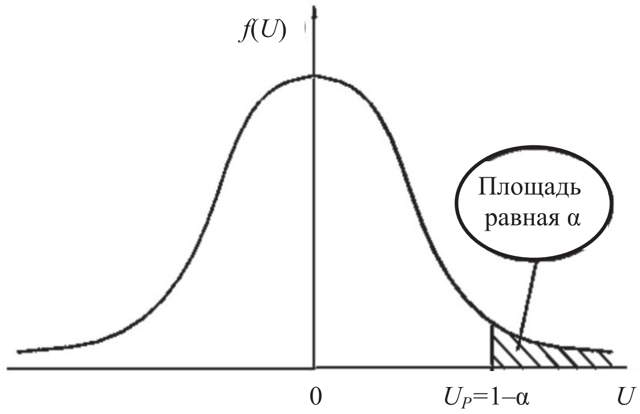


Рис. 4.11. Правосторонняя критическая область на стандартизованном нормальном законе распределения при использовании альтернативной гипотезы $\mu > \mu_0$

При альтернативной гипотезе $\mu \neq \mu_0$ смещение статистики U (см. формулу (4.13)) от центра распределения $U = 0$ может происходить как влево, так и вправо, т. е. в сторону как больших, так и меньших значений. Поэтому необходимо использовать двустороннюю критическую область и соответственно определять две границы критической области. Для определения этих границ в большинстве случаев общий уровень значимости α, определяющий вероятность ошибки первого рода, делят на две равные половины. По прил. 5 следует определить два квантиля: левый $U_{p_1=\alpha/2}$ и правый $U_{p_1=1-\alpha/2}$. Область принятия нулевой гипотезы находится между этими границами (рис. 4.12).

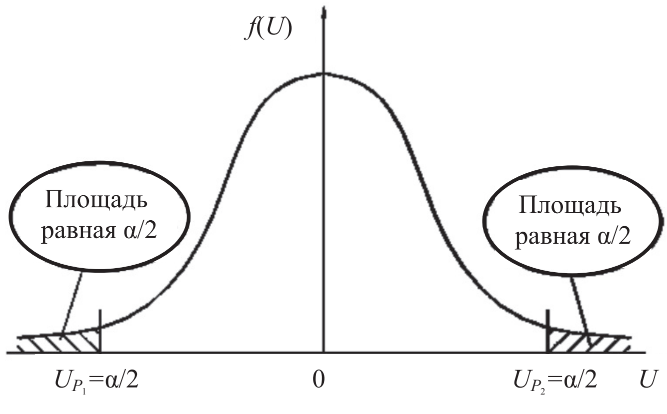


Рис. 4.12. Двусторонняя критическая область на стандартизованном нормальном законе распределения при использовании альтернативной гипотезы $\mu \neq \mu_0$

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы.* Нулевую гипотезу о равенстве неизвестного математического ожидания μ известному числовому значению μ_0 или известному математическому ожиданию μ_0 принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1 $\mu < \mu_0$ $U > U_{p_1=\alpha}$;

б) при H_1 $\mu > \mu_0$ $U > U_{p_2=1-\alpha}$;

в) при H_1 $\mu \neq \mu_0$ $U_{p_1=\alpha/2} > U_{p_1=1-\alpha/2}$.

Отличие сравнения неизвестного математического ожидания с известным числовым значением при неизвестной генеральной дисперсии σ^2 от метода, рассмотренного на с. 173, состоит лишь в том, что генеральная дисперсия σ^2 не известна, но может быть оценена по выборке при помощи числового значения выборочной дисперсии s^2; нулевая гипотеза остается прежней и с тем же смыслом (см. комментарии на с. 141):

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\mu = \mu_0$.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: в целях сокращения записей альтернативную гипотезу сформулируем в следующих вариантах:

а) $\mu < \mu_0$ или $\mu > \mu_0$; б) $\mu \neq \mu_0$.

Как и в других случаях проверки статистических гипотез, при решении конкретной задачи с конкретными цифрами из этих вариантов альтернативной гипотезы для практического использования следует выбрать только один вариант в соответствии с общей логикой решаемой задачи или как наиболее правдоподобный вариант, следующий из сравнения числовых значений $\bar{x}$ и μ_0.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходной случайной величины X при неизвестной генеральной дисперсии проверка нулевой гипотезы проводится с использованием t-критерия [14–19].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию.* Статистика t-критерия для данного случая имеет вид

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{N}}}, \tag{4.14}$$

где s — выборочное стандартное отклонение (положительный квадратный корень из выборочной дисперсии $s = +\sqrt{s^2}$).

Сравнивая t-статистику (4.14) и U-статистику (см. формулу (4.13)), можно обнаружить два отличия. Во-первых, вместо неизвестного генерального стандартного отклонения σ использована его оценка — выборочная дисперсия s. Для рассматриваемой случайной величины X выборочная дисперсия s также является случайной величиной, лишь приблизительно равная неизвестной генеральной дисперсии σ и имеет свое собственное рассеяние при использовании различных выборок. Это приводит к тому, что вместо стандартизованного нормального закона распределения приходится использовать аналогичное по форме, но более широкое распределение Стьюдента, вид которого зависит от объема выборки N, использованной для расчета s. Чем больше N, тем выше точность оценки s и тем ближе распределение Стьюдента (t-распределение) к стандартизованному нормальному закону распределения (к U-распределению). Во-вторых, в числителе использован знак абсолютной величины. Это сделано с единственной целью — получить возможность объединить противоположные альтернативные гипотезы $\mu < \mu_0$ и $\mu > \mu_0$ в единый случай, как будет показано ниже, в целях сокращения записей.

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α (или доверительной вероятности $p = 1 - \alpha$) и числе степеней свободы $\nu = N - 1$ следует определять как квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$ по прил. 7 в зависимости от вида выбранной альтернативной гипотезы следующим образом.

При альтернативной гипотезе $\mu < \mu_0$ или $\mu > \mu_0$ за счет использования знака абсолютной величины статистика t (см. формулу (4.14)) имеет возможность смещаться от центра распределения $t = 0$ только вправо, в сторону положительных значений (т. к. знаменатель всегда положителен). Нулевую гипотезу следует отвергнуть в том случае, если смещение статистики t вправо превысит критическую величину $t_{\alpha,\nu}$ (рис. 4.13).

На рис. 4.13 показана только правая веточка кривой плотности распределения Стьюдента, т. к. использование знака абсолютной величины в выражении для расчета t-статистики (4.14) отсекает область отрицательных значений t (это же касается и показанного ниже рис. 4.14). Такой прием (использование только правой ветви распределения Стьюдента) широко применяется в статистической практике, что нашло свое отражение в структуре статистических таблиц этого распределения, приводимых в литературе.

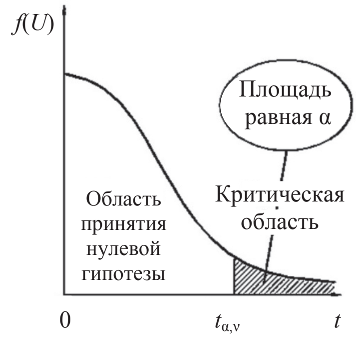


Рис. 4.13. Правосторонняя критическая область на распределении Стьюдента при использовании альтернативной гипотезы $\mu < \mu_0$ или $\mu > \mu_0$

При альтернативной гипотезе $\mu \neq \mu_0$ смещение статистики t (4.14) от центра распределения $t = 0$ также может происходить только вправо, т. е. в сторону положительных значений. Но рассматриваемая гипотеза $\mu \neq \mu_0$ содержит знак $\neq$, предполагающий использование двусторонней критической области, однако за счет использования знака абсолютной величины область отрицательных значений статистики t исчезает. Исчезает и левосторонняя критическая область, а остается только правосторонняя, но отсекаемая границей критической области все равно остается такой же, как и для «чистого» двустороннего случая (без использования знака модуля в формуле статистики), поэтому границей критической области является квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha/2,\nu}$. При таком подходе общий уровень значимости α, определяющий вероятность ошибки первого рода, необходимо делить на две равные половины — $\alpha/2$. Таким образом, по прил. 7 следует определить квантиль $t_{\alpha/2,\nu}$.

Область принятия нулевой гипотезы находится слева от этой границы (рис. 4.14).

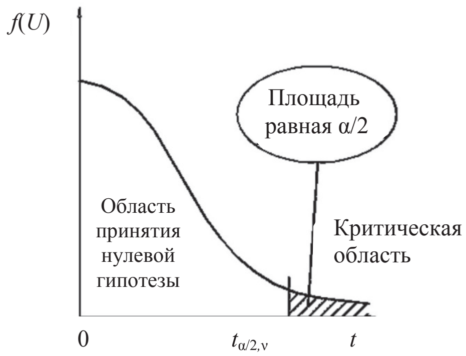


Рис. 4.14. Двусторонняя критическая область на распределении Стьюдента при использовании альтернативной гипотезы $\mu \neq \mu_0$

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о равенстве неизвестного математического ожидания μ известному числовому значению μ_0 или известному математическому ожиданию μ_0 принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1 $\mu < \mu_0$ и $\mu > \mu_0$ должно выполняться условие $t_{\alpha/2,\nu}$;

б) при H_1 $\mu \neq \mu_0$ должно выполняться условие $t_{\alpha/2,\nu}$.

4.4.2. Сравнение двух неизвестных математических ожиданий

Пусть по результатам независимых испытаний двух случайных величин X и Y получены выборки объемами N_x и N_y соответственно. На основе данных этих выборок рассчитаны выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2, являющиеся оценками для неизвестных генеральных дисперсии σ_x^2 и σ_y^2, и средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$, являющиеся оценками для неизвестных математических ожиданий μ_x и μ_y. Поставлена задача — сравнить эти два неизвестных математических ожидания друг с другом.

Частным случаем такой задачи может быть одна из составляющих общей задачи проверки принадлежности двух выборок одной и той же генеральной совокупности, т. е. что обе выборки представляют собой частные реализации одной и той же случайной величины. В этом случае также для имеющихся выборок объемами N_1 и N_2 можно рассчитать выборочные дисперсии s_1^2 и s_2^2 и математические ожидания $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ и использовать их для проведения проверки гипотез относительно неизвестных математических ожиданий μ_1 и μ_2.

Различают два случая проверки нулевой гипотезы $\mu_x = \mu_y$ в зависимости от соотношения генеральных дисперсии σ_x^2 и σ_y^2: эти дисперсии равны $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ и не равны $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Для выявления данного обстоятельства следует предварительно провести проверку гипотезы $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, используя критерий Фишера, рассмотренный в. п. 4.3.2.

Процедуры проверки гипотезы $\mu_x = \mu_y$ для этих двух случаев проведем отдельно в соответствии с общим алгоритмом.

Сравним два неизвестных математических ожидания при различных генеральных дисперсиях:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\mu_x = \mu_y$ — гипотеза о том, что значения неизвестных математических ожиданий μ_x и μ_y анализируемых случайных величин X и Y равны.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: как и в рассмотренном ранее (см. с. 173) в целях сокращения записей альтернативные гипотезы будем использовать только в двух следующих вариантах, для чего используем знак абсолютной величины в формуле для расчета статистики (см. п. 4 рассматриваемого алгоритма):

а) $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$ б) $\mu_x \neq \mu_y$.

При решении конкретной задачи из этих вариантов альтернативной гипотезы для практического использования следует выбрать только один вариант, отвечающий наилучшим образом поставленной в задаче цели или наиболее достоверный.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходных случайных величин X и Y проверка нулевой гипотезы проводится с использованием одного из вариантов приближенного критерия Стьюдента (t-критерия) [12], [14–19].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика t-критерия для случая различных генеральных дисперсий рассматриваемых случайных величин X и Y имеет вид

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{N_x} + \frac{s_y^2}{N_y}}}.$$

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α следует определять как квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$ для числа степеней свободы, определяемого из выражения

$$\frac{1}{\nu} = \frac{c^2}{N_x - 1} + \frac{1 - c^2}{N_y - 1}, \tag{4.15}$$

где c — независимый параметр, необходимый для упрощения расчета, $c^2 = \dfrac{\dfrac{s_x^2}{N_x}}{\dfrac{s_x^2}{N_x} + \dfrac{s_y^2}{N_y}}$.

Значение $t_{\alpha,\nu}$ можно определить по прил. 7. При этом надо учитывать вид выбранной альтернативной гипотезы.

При альтернативной гипотезе $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$ по таблице определяют значение односторонней правой границы $t_{\alpha,\nu}$ (см. рис. 4.13).

При альтернативной гипотезе $\mu_x \neq \mu_y$ используется двусторонняя критическая область, но за счет введения знака абсолютной величины в статистике по формуле (4.18), смещение t-статистики влево, в область меньших значений t, невозможно, поэтому по таблицам квантилей распределения Стьюдента достаточно определить лишь правую границу критической области $t_{\alpha/2,\nu}$. Но поскольку формально критическая область двусторонняя, то для нахождения этого квантиля используется половинный уровень значимости $\alpha/2$ (см. рис. 4.14).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий μ_x и μ_y принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1 $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$ должно выполняться условие $t \leq t_{\alpha,\nu}$;

б) при H_1 $\mu_x \neq \mu_y$ — $t \leq t_{\alpha/2,\nu}$.

Сравним два неизвестных математических ожидания при равных генеральных дисперсиях.

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $\mu_x = \mu_y$ — гипотеза о том, что значения неизвестных математических ожиданий μ_x и μ_y анализируе-

мых случайных величин X и Y равны (или при однотипности закона распределения, с учетом равенства генеральных дисперсий — гипотеза о том, что имеющиеся выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности).

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: аналогично рассмотренному на с. 180, альтернативные гипотезы будем использовать в одном из двух следующих вариантов:

а) $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$; б) $\mu_x \neq \mu_y$.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения исходных случайных величин X и Y проверка нулевой гипотезы проводится с использованием одного из вариантов приближенного критерия Стьюдента (t-критерия) [12], [14–22].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистика t-критерия для случая равных генеральных дисперсий рассматриваемых случайных величин X и Y имеет вид

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y}}}, \tag{4.16}$$

где s — обобщенное для выборок случайных величин X и Y выборочное стандартное отклонение, $s = \sqrt{s^2}$ (здесь s^2 — общая для этих выборок генеральная дисперсия, рассчитываемая по выражению (4.5)).

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости α следует определять как квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$. Но в отличие от рассмотренного на с. 180 случая неравных генеральных дисперсий число степеней свободы здесь рассчитывается по выражению

$$\nu = N_x + N_y - 2.$$

Значение $t_{\alpha,\nu}$ можно определить по прил. 7. При этом надо учитывать вид выбранной альтернативной гипотезы.

При альтернативной гипотезе $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$ по таблице определяют значение односторонней правой границы $t_{\alpha,\nu}$ (см. рис. 4.13).

При альтернативной гипотезе $\mu_x \neq \mu_y$ используется двусторонняя критическая область, но за счет введения знака абсолютной величины в статистике (4.16) смещение t-статистики влево, в область меньших значений t, невозможно. Поэтому по таблицам достаточно определить лишь правую границу критической области $t_{\alpha/2,\nu}$. Но поскольку формально критическая область двусторонняя, то для нахождения этого квантиля используется половинный уровень значимости $\alpha/2$ (см. рис. 4.14).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий μ_x и μ_y принимают, если при соответствующей альтернативной гипотезе выполняется неравенство:

а) при H_1 $\mu_x > \mu_y$ или $\mu_x < \mu_y$ должно выполняться условие $t \le t_{\alpha,\nu}$;

б) при H_1 $\mu_x \ne \mu_y$ — $t \le t_{\alpha/2,\nu}$.

В случае подтверждения нулевой гипотезы $\mu_x = \mu_y$ и наличия основания полагать, что обе исходные выборки принадлежат одной генеральной совокупности, по двум выборочным средним арифметическим $\bar{x}$ и $\bar{y}$ можно получить более точную оценку общего для этих выборок математического ожидания $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}N_x + \bar{y}N_y}{N_x + N_y},$$

которая может быть использована для дальнейшего анализа опытных данных.

4.5. Критерии согласия

Одним из наиболее важных (а возможно, и самым важным) обстоятельством, обеспечивающим правильность, точность, надежность и прочие положительные свойства результатов вероятностных и статистических исследований, является знание закона распределения рассматриваемой случайной величины. Практически все современные представления об описании случайной величины и оперирование с ней базируются на тождестве: «случайная величина» = «закон ее распределения». Насколько точно и подробно окажется знание закона распределения используемой случайной величины, настолько точны и надежны оказываются результаты исследований, расчетов, теоретических построений, базирующихся на использовании этой случайной величины.

Учитывая неопределенность (см. подглаву 2.1) и вероятностную сущность случайной величины, наиболее фундаментальное знание, которое принципиально может получить исследователь относительно случайной величины (генеральное, всеобъемлющее знание), — это знание точного закона ее распределения. Но мир чрезвычайно разнообразен, считается, что в природе нет двух абсолютно одинаковых реальных объектов. Также, скорей всего, нет и двух абсолютно одинаковых случайных величин. Поэтому абсолютно точное описание, включающее все мелкие подробности, на практике вряд ли возможно. Для практических целей вполне приемлемо описать случайную величину достаточно подробно. Ранее отмечалось (см. подглаву 2.1), что в настоящее время используют два основных способа описания случайных величин: 1) описывают закон распределения — наиболее подробный способ, использующий понятия функция распределения и плотность распределения; 2) используют числовые характеристики случайной величины — специальные величины, описывающие специфические свойства конкретной случайной величины в числовой форме (математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение и т. д.). Сейчас речь идет только о первом способе описания.

Достаточно подробное знание закона распределения используемой случайной величины позволяет инженеру с требуемой точностью решать многие вопросы практической направленности: планирование производства, управление технологическим процессом, работой машины, промышленного агрегата, вопросы управления и планирования качества выпускаемой продукции, точно решать и многие другие задачи. И наоборот, игнорирование или использование ложного представления о законе распределения используемой случайной величины приводит к возникновению грубых ошибок, могущих иметь весьма серьезные последствия. Однако на практике одним из самых распространенных видов ошибок при использовании статистических методов являются ошибки, связанные с использованием гипотетических теоретических распределений, сильно отличающихся от реальных эмпирических распределений. Единственная возможность избежать таких ошибок — разработать и использовать методы, способы, позволяющие достаточно точно идентифицировать эмпирическое распределение. В современной практике это сводится, как правило, к использованию специальных методов, позволяющих подобрать такой известный теоретический закон распределения, который достаточно подробно и точно описывает эмпирическое распределение.

В понятие «достаточно подробное и точное описание случайной величины теоретическим законом» вкладывают следующий смысл: 1) установлены тип, вид теоретического закона распределения, наилучшим образом описывающий опытные данные; 2) выявлены (чаще всего, рассчитанные с использованием опытных данных) конкретные числовые значения параметров этого распределения — «настроечные коэффициенты», адаптирующие теоретическое распределение к конкретному случаю конкретной реальной случайной величины.

Процедурам решения второго вида задачи (установление значений параметров распределения путем оценивания и проверки гипотез) посвящен ряд предыдущих разделов, здесь же рассмотрим первую задачу — процедуры установления вида теоретического распределения, наилучшим образом описывающего опытные данные.

Весь процесс идентификации вида эмпирического распределения проводят в два этапа:

- этап 1 — подбор подходящего теоретического закона распределения, наилучшим образом описывающего закономерность изменения вероятностных свойств случайной величины;
- этап 2 — проверка соответствия опытных данных этому теоретическому закону.

Наиболее простым, очевидным и поэтому широко применяемым методом подбора подходящего теоретического закона распределения является графический метод, заключающийся в построении эмпирических графиков функции распределения и плотности распределения (алгоритмы построении таких графиков рассмотрены в подглавах 2.2 и 2.3) и визуальном сопоставлении этих графиков с теоретическими кривыми, приведенными в справочниках или построенными самостоятельно с использованием соответствующих аналитических выражений, описывающих эти кривые.

Другой вариант идентификации эмпирического распределения подробно описан в [15, 16]. Суть этого метода состоит в том, что специальным образом преобразованные опытные данные наносятся на так называемую вероятностную бумагу (на которой использована специальная координатная сетка). На каждом из видов вероятностной бумаги соответствующая теоретическая функция распределения за счет преобразования координат (линеаризации) представляется в виде прямой линии. Если экспериментальные точки располагаются вблизи этой прямой с небольшими случайными отклонениями вверх и вниз, то считается, что опытные данные соответствуют рассматриваемому распределению. Систематические и значительные отклонения говорят об ошибке в выборе модельного распределения.

Конечно, оба этих варианта графического установления модели закона распределения являются в значительной мере приближенными и субъективными, но вполне приемлемыми для первоначального ориентировочного подбора теоретического распределения и используются на практике в качестве первого приближения при решении всей задачи.

Второй этап идентификации связан с применением специального класса статистических критериев — «критериев согласия» и является более объективным методом установления вида распределения случайной величины. Однако обойтись без проведения первого этапа, видимо, невозможно.

Критерии согласия служат для проверки статистической гипотезы о соответствии генеральной совокупности предполагаемому теоретическому закону распределения на основании анализа выборки опытных данных из этой совокупности. Известно достаточно большое количество критериев согласия [12], отличающихся своей универсальностью, мощностью при разных альтернативных гипотезах и применимостью в тех или иных статистических ситуациях.

Все известные критерии согласия принято делить на два класса:

1) общие (или универсальные) критерии согласия;

2) специальные критерии согласия.

Общие критерии согласия применимы для проверки на соответствие эмпирических данных любому теоретическому закону распределения.

Все общие критерии согласия по сути их построения можно разделить на три группы [8, 9, 12], [17–19], [23]:

- критерии, основанные на сопоставлении интервальных вероятностных характеристик теоретической кривой плотности распределения и проверяемой эмпирической гистограммы распределения частот, построенной по экспериментально полученной выборке;
- критерии, основанные на рассогласовании между значениями теоретической функции распределения и эмпирической функцией распределения, построенной по опытным значениям;

- корреляционно-регрессионные критерии, основанные на изучении корреляционно-регрессионных связей между эмпирическими и теоретическими порядковыми статистиками.

Специальные критерии согласия предназначены для проверки соответствия эмпирических распределений конкретному теоретическому закону распределения: нормальному, экспоненциальному, Вейбулла и т. п. Такие критерии имеют соответствующие названия и относятся к соответствующим группам критериев: критерии нормальности, критерий экспоненциальности и т. п. Специальные критерии согласия получают двумя способами: 1) как частный случай общих критериев согласия для конкретного типа распределения за счет более точного учета специфических свойств рассматриваемого распределения, что приводит к повышению мощности используемого критерия; 2) строятся на основе использования каких-то специфических свойств, характерных для рассматриваемого типа теоретического распределения и существенно отличающихся в других распределениях.

Очевидным достоинством общих критериев согласия является их универсальность, но в значительном количестве случаев специальные критерии имеют существенно большую мощность, требуют меньшее количество опытных данных, содержат более простые вычислительные процедуры и могут иметь другие достоинства. Например, в справочнике [12] на основе данных [24] приведено сравнение критериев согласия, примененных для различных ситуаций проверки нормальности распределений случайных величин (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Сравнение результатов использования критериев согласия при проверке нормальности распределения

Наименование критерия	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4<3$	$\alpha_4>3$	$\alpha_4<3$	$\alpha_4>3$	$\alpha_4\approx3$	
Критерий Шапиро — Уилка	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека	2	14	8	10	10	6

Окончание табл. 4.2

Наименование критерия	Характер альтернативного распределения					Ранг
	асимметричное		симметричное		≈ нормальное	
	α_4<3	α_4>3	α_4<3	α_4>3	$\alpha_4\approx 3$	
Критерий Дэвида — Хартли — Пирсона	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2	9	20	9	8	3	8
Критерий Андерсона — Дарлинга	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова — Смирнова	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса — Иглевича	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина — Мудхолкара	4	15	12	12	16	13
Критерий α_3	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхалтера	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова — Крамера — Фон Мизеса	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка — Спурье	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази — Грина	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты — Такеучи	15	21	17	20	20	21

Из табл. 4.2 видно, что наиболее широко известные и часто упоминаемые в научной литературе критерии согласия, например, такие как χ^2-критерий, критерий Колмогорова — Смирнова и т. п., находятся далеко не на первых местах обобщенного рейтинга.

Ниже рассмотрены некоторые, наиболее часто применяемые, критерии согласия из упомянутых выше разных групп критериев, представляющие лишь малую часть довольно известных критериев этого типа.

4.5.1. χ^2-критерий согласия (критерий согласия Пирсона)

Критерий χ^2 относится к группе универсальных критериев, основанных на сравнении эмпирической гистограммы с теоретическим законом распределения, представленным в виде функции плотности распределения.

Считается [15–17], что этот критерий обладает достаточной для практики мощностью при объеме имеющейся выборки $N > 100$, однако на практике довольно часто применяется и при меньших количествах опытных данных. Критерий применим для проверки гипотез о соответствии эмпирического распределения любому теоретическому закону распределения, причем как для простых гипотез (когда известны генеральные значения параметров теоретического распределения), так и для сложных (когда генеральные значения параметров теоретического распределения или неизвестны, или оценены по той же выборке, по которой производится проверка соответствия, правда, в этих случаях мощность критерия существенно ниже).

Расчет статистики критерия Пирсона основан на анализе эмпирической гистограммы распределения частот, использованной, например, при построении эмпирического графика плотности распределения в подглаве 2.3, поэтому ряд процедур, используемых в этих случаях и рассмотренных в подглаве 2.3, имеют общие черты и могут быть использованы и при расчете статистики χ^2.

Для проведения проверки необходимо иметь выборку опытных значений рассматриваемой случайной величины X, которую следует подвергнуть ранжированию так, чтобы оказалось $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$.

Ширина размаха (диапазона) варьирования опытных данных составляет

$$L = x_N - x_1.$$

Весь диапазон варьирования L следует разбить на k интервалов шириной Δx_i. Выбор количества интервалов разбиения k существенно зависит от объема имеющейся выборки N, и количество используемых интервалов существенно влияет на мощность применяемого критерия согласия. В [8] приведена классификация методов разбиения размаха варьирования опытных данных на интервалы и соответствующих способов выбора k, состоящая из трех групп методов:

- методы, использующие интервалы одинаковой ширины Δx;
- методы, использующие интервалы различной ширины, но с равной вероятностью попадания в них значения случайной величины для рассматриваемого теоретического закона распределения;
- асимптотически оптимальное группирование опытных данных.

При использовании интервалов Δx одинаковой ширины для расчета количества интервалов разбиения k известно достаточно большое количество различных формул и рекомендаций, например следующие:

- эвристическая формула Старджесса

$$k = \log_2 N + 1 = 3{,}31 \lg N + 1;$$

- формула Брукса и Коррузера

$$k = 5 \lg N;$$

- формула Хаинхольда и Гаеде

$$k = \sqrt{N}.$$

При больших объемах выборок, количество интервалов k одинаковой ширины Δx можно выбрать, основываясь на рекомендации ВННИМ им. Д. И. Менделеева [25] в зависимости от объема выборки N:

N	40–100	100–500	500–1000	1000–10000
K	7–9	8–12	10–12	12–22

или на основе рекомендаций М. Н. Степнова [15, 16]:

N	100	200	400	1000
K	10–15	15–20	25–30	35–40

При равновероятностном разбиении количество интервалов разбиения k также зависит от объема выборки N. Рекомендуется [8, 12] выбирать k, используя условие $Np_i \geq 5...10$. При этом в [26] показано, что при $k > 10$ мощность критерия падает, поэтому для выборок объемом $N = 200$ и более оптимальной величиной является $k \approx 10$.

При асимптотически оптимальном группировании также используются интервалы разбиения различной ширины. Количество интервалов разбиения k и положения границ каждого из интервалов существенно зависит как от объема выборки, так и от вида теоретического распределения, на соответствие которому проводится проверка. В [8] приведены исчерпывающие пояснения, рекомендации и справочные материалы, позволяющие провести асимптотически оптимальное группирование опытных данных, используя относительно небольшое количество интервалов разбиения k.

Сравнивая эти способы разбиения размаха варьирования опытных данных на интервалы, авторы [12, 8] отмечают, что все эти способы разбиения дают примерно одинаковые результаты в ситуациях значительных отклонений эмпирических распределений от соответствующих теоретических. Ощутимые преимущества у способа асимптотически оптимального группирования возникает при малых отклонениях теоретического и эмпирического распределений, которые могут быть не замечены при использовании первых двух способов разбиения.

Процедуру проверки соответствия эмпирического распределения модельному теоретическому закону будем рассматривать в соответствии с общим алгоритмом, приведенным на с. 141 и использованным нами выше в подглавах 4.1–4.3.

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $F^Э(x) = F^T(x)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^Э(x)$ не противоречит теоретическому распределению $F^T(x)$.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: $F^Э(x) \neq F^T(x)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^Э(x)$ не соответствует рассматриваемому теоретическому распределению $F^T(x)$.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. В данном случае это лишь формальный пункт, т. к. рассматривается критерий согласия Пирсона (χ^2-критерий).

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию.* Статистикой χ^2-критерия является величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - Np_i\right)^2}{Np_i}, \tag{4.17}$$

где k — количество интервалов разбиения Δx_i всего размаха опытных данных L (о численном значении k см. с. 190); n_i — количество опытных значений $x_j \left(j = 1, 2, \ldots, N\right)$ из выборки, попавших в i-й интервал Δx_i; N — объем выборки; p_i — теоретическая вероятность попадания случайной величины в i-й интервал Δx_i.

Следует отметить, что произведение Δx_i в выражении (4.17) представляет собой не что иное, как теоретическое количество опытных значений n_i^m, которые должны оказаться в рассматриваемом интервале Np_i, если для теоретического закона распределения произвести расчет N значений рассматриваемой случайной величины. Поэтому разность $(n_i - Np_i)$ в числителе выражения (4.17) представляет собой разность между эмпирическим количеством опытных значений, попавших в i-й интервал Δx_i, и количеством таких же значений $n_i^T = Np_i$, предсказанных по теоретическому закону распределения.

Для расчета вероятности p_i и подсчета количества n_i опытных значений $x_j\left(j=1, 2, \ldots, N\right)$ из выборки, попавших в i-й интервал, необходимо рассчитать левую $x_i^{\text{Лев}}$ и правую $x_i^{\text{Пр}}$ границы для каждого из интервалов разбиения Δx_i. Расчет внутренних границ проводится путем последовательного добавления ширины интервала Δx_i к предыдущей границе, в качестве исходного значения выступает x_1. Важно отметить, что при расчете теоретической вероятности p_i в качестве левой границы первого интервала следует использовать не первое опытное значение в вариационном ряду x_1, а значение $x_i^{\text{Лев}} = -\infty$. Для последнего ($k$-го) интервала правая граница также должна охватывать все принципиально возможные «правые» значения случайной величины, т.е. следует принимать $x_i^{\text{Пр}} = +\infty$, а не x_N. Если какое-то опытное значение совпало по величине с границей интервала, то его следует отнести к интервалу, расположенному слева от границы.

Расчет p_i проводится с использованием теоретических функций или плотности модельного распределения. Для ряда распределений можно воспользоваться справочными таблицами значений функции распределения, возможностями Excel или других компьютерных программ (см. подглаву 2.2).

5. *Границу критической области* $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определяют как квантиль распределения Пирсона (прил. 6) в зависимости от принятого уровня значимости α и числа степеней свободы ν, определяемого в зависимости от типа проверяемой гипотезы. При простой гипотезе (когда генеральные параметры теоретического распределения, на соответствие которому проводится проверка, известны) $\nu = k - 1$, при сложной гипотезе (когда генеральные значения параметров теоретического распределения оценены по той же выборке, по которой производится проверка соответствия) $\nu = k - c - 1$, где c — количество параметров теоретиче-

ского распределения, оцененных по выборке, например для нормального закона распределения чаще всего $c = 2$.

Граница критической области $\chi^2_{\alpha,\,\nu}$ является правосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается слева от нее (в области наибольшей вероятности для χ^2). Это можно проверить, используя рассмотренный в подглаве 4.1 метод пробной точки, приняв в качестве базовой гипотезы $H_Б = H_0$, а в качестве комплексной пробной точки — полное равенство рассматриваемых теоретического и эмпирического распределений (совпадение графиков теоретической и эмпирической плотностей распределения). При этом разность между количеством эмпирически опытных значений n_i и этим же значением для теоретического закона распределения $n_i^T = Np_i$ для любого интервала Δx_i будет равна нулю.

6. Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы. Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины выбранному теоретическому распределению отвергают, если нарушается условие $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha,\,\nu}$.

4.5.2. Критерий согласия Колмогорова — Смирнова

Критерий согласия Колмогорова — Смирнова относится к группе универсальных критериев, основанных на сравнении эмпирической функции распределения $F^Э(x)$ в виде эмпирического графика накопленных частот

$$F^Э(x_i) = \begin{cases} 0, \; x < x_1, \\ \dfrac{i}{N}, \; x_i \le x < x_{N-1}, \\ 1, \; x \ge x_N, \end{cases} \qquad (4.18)$$

с теоретическим законом распределения, представленным в виде известной функции распределения $F^T(x)$. В классическом виде критерий предназначен для проверки простых гипотез согласия (когда известны числовые значения генеральных параметров распределения), однако для достаточно большого списка теоретических распределений [9, с. 27] может быть использован и при сложных гипотезах (когда числовые значения генеральных параметров распределения оцениваются по той же выборке, по которой проводится проверка соответствия). В случае простой гипотезы критерий является универсальным, не зависящим от рассматриваемого теоретического распределения. В случае сложной гипотезы критерий теряет свою универсальность, т. к. его мощность становится зависимой не только от объема выборки, но и от вида распределения, на соответствие которому производится проверка.

По мнению многих авторов, критерий Колмогорова — Смирнова обладает большей мощностью, чем χ^2-критерий, что связано с потерей информации о выборке, происходящей в процессе ее группирования при расчете статистики χ^2-критерия (что противоречит данным табл. 4.2). Считается [15–17], [20], что данный критерий обладает достаточной для практики мощностью уже при объеме имеющейся выборки $N > 50$.

Для проведения проверки по критерию Колмогорова — Смирнова необходимо иметь выборку опытных значений рассматриваемой случайной величины X, которую следует подвергнуть ранжированию так, чтобы оказалось $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$.

Процедуру проверки будем рассматривать также в соответствии с общим алгоритмом, приведенным на с. 141 и использованным ранее:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $F^{Э}(x) = F^{Т}(x)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не противоречит теоретическому распределению $F^{Т}(x)$.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: $F^{Э}(x) \neq F^{Т}(x)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не соответствует рассматриваемому теоретическому распределению $F^{Т}(x)$.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Использование критерия согласия Колмогорова — Смирнова отличается в зависимости от типа рассматриваемой гипотезы: а) при известных генеральных параметрах распределения (простая гипотеза) этот критерий является универсальным; б) при сложной гипотезе (генеральных параметрах распределения не известны, но оценены по выборке) критерий используется как специализированный. Рассмотрим эти два варианта использования критерия Колмогорова — Смирнова параллельно.

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию.* Рассчитывается максимальное отклонение между опытным и гипотетическим значениями функции распределения

$$\begin{cases} D_N^{+} = \max_{1 \le i \le N} \left[\dfrac{i}{N} - F^{\text{T}}(x_i) \right], \\ D_N^{-} = \max_{1 \le i \le N} \left[F^{\text{T}}(x_i) - \dfrac{i-1}{N} \right], \end{cases} \tag{4.19}$$

$$D_N = \max\left[D_N^{+}; D_N^{-} \right], \tag{4.20}$$

где i — порядковый номер рассматриваемого опытного значения x_i в ранжированном вариационном ряду ($x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$); N — объем выборки; $F^{\text{T}}(x_i)$ — значение теоретической функции распределения, на соответствие которой осуществляется проверка выборки, рассчитанной для рассматриваемого выборочного значения x_i; $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, N)$ — текущее опытное значение.

В [12, 15] расчет статистики критерия Колмогорова — Смирнова предлагают проводить в зависимости от типа рассматриваемой гипотезы и объема выборки.

Для простой гипотезы (при известных генеральных параметрах распределения) и при большом объеме рассматриваемой выборки $N > 35$ рассчитывается статистика

$$\lambda_1 = D_N \sqrt{N}. \tag{4.21}$$

Для простой гипотезы при малом объеме выборки $N \leqslant 35$ и для сложной гипотезы (при неизвестных генеральных параметрах распределения, оцененных по той же выборке) используется другая статистика

$$\lambda_2 = D_N \left(\sqrt{N} + 0{,}12 + \frac{0{,}11}{\sqrt{N}} \right). \tag{4.22}$$

Для проверки нормальности эмпирического закона распределения (соответствия эмпирического распределения теоретическому нормальному или логарифмически нормальному закону распределения) в [12] и [15] предлагают использовать модифицированную для этого случая статистику λ_3, не зависящую от типа гипотезы (простая или сложная) и объема выборки, рассчитываемую по выражению

$$\lambda_3 = D_N \left(\sqrt{N} - 0{,}01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{N}} \right). \qquad (4.23)$$

В [9] и при простой и при сложной гипотезах, вне зависимости от объема выборки, рекомендуют использовать статистику

$$\lambda_4 = \frac{6ND_N + 1}{6\sqrt{N}}. \qquad (4.24)$$

Статистика λ_4 может быть использована для проверки на соответствие эмпирического распределения достаточно большому количеству теоретических распределений (полный список которых приведен в [9, с. 27–28]). Для каждого из таких теоретических распределений используется свое предельное распределение статистики λ_4, что приводит к необходимости использовать различные табличные значения для определения квантилей.

5. *Границу критической области* λ_α определяют как квантиль распределения Колмогорова в зависимости от принятого уровня значимости α, рассматриваемого случая (простая или сложная гипотезы), вида теоретического закона распределения и использованной для этого случая статистики.

При использовании статистики λ_1 (см. формулу (4.21)) и λ_2 (см. формулу (4.22)) [12, 15]) границу критической области λ_α можно определить так:

α	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01
λ_α	1,138	1,224	1,358	1,480	1,628

При проверке нормальности эмпирического распределения с использованием модифицированной статистики λ_3 (см. формулу (4.24)) [12, 15] границу критической области λ_α следует определить так:

α	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01
λ_α	0,775	0,819	0,895	0,955	1,0,35

При использовании статистики λ_4 (см. формулу (4.24)) [9] границу критической области λ_α можно определить по табл. 4.3 в зависимости от количества параметров теоретического распределения, рассчитанных по выборке и используемых для проверки согласия.

Таблица 4.3

Квантили λ_α распределения Колмогорова при использовании статистики λ_4 [9]

α	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01
Простая гипотеза	1,138	1,224	1,358	1,480	1,628
Дисперсия*	1,095	1,180	1,317	1,446	1,609
Математическое ожидание*	0,838	0,887	0,963	1,035	1,126
Оба параметра*	0,790	0,833	0,904	0,972	1,060

* Оценено по выборке.

Граница критической области λ_α является правосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается слева от нее (что можно проверить, используя метод пробной точки, приняв в качестве базовой гипотезы H_0, а в качестве комплексной пробной точки — полное совпадение кривых функции распределения рассматриваемых теоретического и эмпирического распределений).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины выбранному теоретическому распределению отвергают при уровне значимости α, если нарушается условие $\lambda_i \le \lambda_\alpha$ ($i = 1,\ 2,\ 3$ в зависимости от использованной статистики).

4.5.3. Критерий согласия Шапиро — Уилка

Критерий согласия Шапиро — Уилка (W-критерий согласия) относится к группе специализированных критериев, предназначен для проверки соответствия эмпирического распределения $F^{\text{Э}}(x)$ теоретическому нормальному и логарифмически нормальному законам распределения $F^{\text{Т}}(x) = N(\mu,\sigma)$. При малых объемах выборки ($N \leqslant 50$) критерий Шапиро — Уилка обладает наибольшей мощностью по сравнению с другими критериями [12, 15, 24].

Проведем проверку соответствия эмпирического распределения теоретическому нормальному распределению, используя ранжированную выборку $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $F^{\text{Э}}(x) = N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{\text{Э}}(x)$ не противоречит тео-

ретическому нормальному закону распределению $N(\mu,\sigma)$ с параметрами μ и σ, оцененными при помощи среднего арифметического $\overline{x}$ и несмещенной выборочной дисперсии s^2 соответственно.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: $F^{Э}(x) \equiv N(\mu,\sigma)$ – гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не соответствует рассматриваемому теоретическому нормальному распределению $N(\mu,\sigma)$.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. При использовании критерия Шапиро — Уилка (как и при использовании большинства других специализированных критериев) рассматривают сложную гипотезу, что значительно чаще встречается на практике, хотя возможно использование и простой гипотезы.

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистикой критерия согласия Шапиро — Уилка является величина [15]

$$W = \frac{b^2}{s^2}, \tag{4.25}$$

для расчета которой необходимо предварительно рассчитать входяшие в ее состав величины

$$s^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2, \tag{4.26}$$

$$b = \sum_{N=1}^{k} a_{n-i+1}\left(x_{n-i+1} - x_i\right), \tag{4.27}$$

где значения коэффициентов a_{n-i+1} для i = 1, 2, ..., k выбираются из прил. 11, причем если N (объем выборки) является четным, то $k = \frac{N}{2}$, а если N нечетным, то $k = \frac{N-1}{2}$.

5. *Границу критической области* $W_{\alpha,N}$ определяют по таблице критических значений, приведенной в прил. 12, в зависимости от принятого уровня значимости α и объема выборки N.

Граница критической области $W_{\alpha,N}$ является левосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается справа от нее.

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анали-

зируемой случайной величины выбранному нормальному закону распределения принимают при уровне значимости α, если выполняется условие $W \geq W_{\alpha,N}$.

При больших объемах выборки использовать критерий Шапиро–Уилка весьма неудобно в связи с необходимостью подбора большого количества коэффициентов a_{n-i+1} из таблицы. Поэтому в большинстве справочников приводятся соответствующие таблицы до $N = 50$. Для устранения этой проблемы разработан ряд модификаций критерия Шапиро–Уилка, позволяющих упростить процедуру проверки гипотезы о нормальности эмпирического распределения.

Критерий Шапиро — Франчиа [12, 27] использует статистику W' (пункт 4 рассмотренного выше алгоритма) вместо статистики W.

$$W' = \frac{1}{s^2}\left[\sum_{i=1}^{k} c_{N-i+1}\left(x_{N-i+1} - x_i\right)\right]^2,$$

где $c_{N-i+1} = \dfrac{m_{N-i+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} m_{i,N}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$;

$$m_i = 4{,}91\left\{\left(\frac{i-0{,}375}{N+0{,}25}\right)^{0{,}14} - \left(\frac{N-i+0{,}625}{N+0{,}25}\right)^{0{,}14}\right\}.$$

Для проверки нулевой гипотезы, так же как и при использовании исходного критерия Шапиро — Уилка, статистику W' необходимо сравнить с критическим значением $W_{\alpha,N}$ (пункт 5 рассмотренного выше алгоритма), определяемым по таблице критических значений, приведенной в прил. 12, в зависимости от принятого уровня значимости α и объема выборки N.

Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины выбранному нормальному закону распределения принимают (пункт 6 алгоритма), если выполняется условие $W' \geq W_{\alpha,N}$.

Для еще большего упрощения процедуры использования критерия Шапиро–Уилка в [28] приведена «полезная» [12] аппроксимация Казакавичюса, ограничивающая использование критерия для наиболее часто рассматриваемого случая, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Предлагается использовать статистику W_1 (пункт 4 рассмотренного выше алгоритма) вместо статистики W:

$$W_1 = \left(1 - \frac{0{,}6695}{N^{0{,}6518}}\right)\frac{s^2}{B},$$

где $B = \left\{\sum_{i=1}^{m} a_j\left(x_{N-j} - x_j\right)\right\}^2$; $m = \dfrac{N}{2}$; $a_0 = \dfrac{0{,}899}{\left(N - 2{,}4\right)^{0{,}4162}} - 0{,}02;$

$$a_j = a_0\left[z + \frac{1483}{\left(3-z\right)^{10{,}845}} + \frac{71{,}610^{-10}}{\left(1{,}1-z\right)^{8{,}26}}\right];\ z = \frac{N-2j+1}{N-0{,}5}.$$

Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины выбранному нормальному закону распределения принимают (пункт 6 алгоритма), если выполняется условие $W_1 < 1$.

4.5.4. Проверка нормальности распределения с использованием показателей асимметрии и эксцесса

Для теоретического нормального закона распределения коэффициент асимметрии (асимметрия) $A = 0$ и коэффициент эксцесса (эксцесс) $E = 3$. Постоянство этих значений положено в основу рассматриваемого критерия. Но поскольку в общем случае такие же значения этих коэффициентов могут быть и у других распределений, то рассматриваемый критерий принято относить к группе приближенных критериев, позволяющих подтвердить или отвергнуть лишь факт статистически значимого отклонения эмпирических коэффициентов асимметрии и эксцесса от значений 0 и 3, что не верно для теоретического нормального закона распределения.

Расчет выборочных точечных оценок этих коэффициентов может быть произведен по следующим выражениям:

- коэффициент асимметрии

$$\widehat{A} = \frac{1}{Ns^3}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^3; \qquad (4.28)$$

- коэффициент эксцесса

$$\widehat{E} = \frac{1}{Ns^4}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^4, \quad (4.29)$$

где $s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$.

Для этих оценок математическое ожидание и дисперсия асимметрии и эксцесса составляют соответственно [12]

$$\mu_{\widehat{A}} = 0,\ s_{\widehat{A}}^2 = \frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)} \approx \frac{6}{N}\left(1 - \frac{12}{2N+7}\right), \quad (4.30)$$

$$\mu_{\widehat{E}} = 3 - \frac{6}{n+1},\ s_{\widehat{E}}^2 = \frac{24N(N-2)(N+3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)} = \frac{24}{N}\left(1 - \frac{225}{15N+224}\right). \quad (4.31)$$

При проверке гипотезы о нормальности распределения с использованием коэффициентов асимметрии и эксцесса применяют в основном два способа:

1. Приближенный способ проверки состоит в сопоставлении оценок коэффициентов асимметрии $\widehat{A}$ (4.28) и эксцесса $\widehat{E}$ (4.29) с их стандартными отклонениями

$$s_{\widehat{A}} = \sqrt{s_{\widehat{A}}^2}, \quad (4.32)$$

где $s_{\widehat{A}}^2$ рассчитывается по выражению (4.30),

$$s_{\widehat{E}} = \sqrt{s_{\widehat{E}}^2}, \quad (4.33)$$

где $s_{\widehat{E}}^2$ рассчитывается по выражению (4.31).

Если выполняются условия $\widehat{A} \le s_{\widehat{A}}$ и $\left|\widehat{E} - 3\right| \le s_{\widehat{E}}$, то нулевую гипотезу о нормальности эмпирического распределения не отвергают.

2. Более строгим способом проверки является следующий подход, изложенный ниже, в соответствии с общим алгоритмом, приведенным в п. 4, с. 141:

1. *Формулируем нулевую гипотезу* H_0: $F^{Э}(x) = N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не противоречит теоретическому нормальному закону распределения $N(\mu,\sigma)$ с параметрами μ и σ, оцененными при помощи среднего арифметического $\bar{x}$ и несмещенной выборочной дисперсии s^2 соответственно.

2. *Формулируем альтернативную гипотезу* H_1: $F^{Э}(x) \neq N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не соответствует рассматриваемому теоретическому нормальному распределению $N(\mu,\sigma)$.

3. *Выбираем критерий для проверки* H_0. Наиболее мощным критерием, использующим коэффициенты асимметрии и эксцесса, является так называемый комбинированный критерий K^2 [12, 15], применим при сложных гипотезах и подчиненный распределению Пирсона при числе степеней свободы $\nu = 2$.

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*. Статистикой K^2-критерия является величина

$$K^2 = \left(\frac{\widehat{A}}{s_{\widehat{A}}}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{E}-3}{s_{\widehat{E}}}\right)^2,$$

значения составляющих которой определены выше выражениями: $\widehat{A}$ и $\widehat{E}$ — (4.28) и (4.29), $s_{\widehat{A}}$ и $s_{\widehat{E}}$ — (4.32) и (4.33).

Отношения $\dfrac{\widehat{A}}{s_{\widehat{A}}}$ и $\dfrac{\widehat{E}-3}{s_{\widehat{E}}}$ называют стандартными нормальными (или стандартными нормализованными) эквивалентами асимметрии и эксцесса.

5. *Границу критической области* $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определяют по таблице квантилей распределения Пирсона, приведенной в прил. 6 в зависимости от принятого уровня значимости α и для числа степеней свободы $\nu = 2$.

Граница критической области $\chi^2_{\alpha,\nu}$ является правосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается слева от нее.

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины выбранному нормальному закону распределения принимают при уровне значимости α, если выполняется условие $K^2 \leq \chi^2_{\alpha,\nu}$.

5. Анализ опытных данных

Анализ данных наиболее удобно рассмотреть на конкретном примере.

Исходные данные

На проволочном прокатном стане в течение многих лет производили катанку В-6,0-Ст3кп-ВО ГОСТ 30136–94 (В — обозначение обычной точности прокатки, ВО — охлаждение на воздухе) с минимально возможным по условиям прокатки диаметром 6 мм с полем допуска по ГОСТ 2590–2006 $^{+0,3}_{-0,5}$ (для класса точности В). По многолетним накопленным данным измерений фактического диаметра готовой катанки установлено, что стандартное отклонение диаметра от номинала составляет $\sigma = 0,19$ мм. Данные тридцати случайно выбранных измерений диаметра произведенной катанки приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Данные измерений диаметра катанки *X*, произведенной по старой технологии (без использования чистового блока клетей), мм

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5,99	5,95	6,22	6,01	6	5,73	6,04	5,86	5,95	5,91
Номер измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	6,06	5,93	6,09	6,12	6,16	6,05	5,72	6,19	5,86	5,93
Номер измерения	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	6,27	6,55	6	5,71	5,83	5,98	5,69	6,07	5,86	5,77

Для увеличения точности готовой катанки (для перехода на класс повышенной точности Б с полем допуска $^{+0,1}_{-0,5}$), получения возможности уменьшить ее диаметр и внедрения технологии ускоренного одностадийного охлаждения (класс УО1) на стане проведена реконструкция, в процессе которой, в частности, установлен 6-клетьевой чистовой блок (ЧБК). При этом для размещения нового оборудования пришлось демонтировать две последние прокатные клети стана. Конечной целью реконструкции был переход на производство катанки Б-6,0-Ст3кп-УО1 ГОСТ 30136–94, или (при наличии практической возможности) Б-5,5-Ст3кп-УО1 ГОСТ 30136–94, или даже Б-5,0-Ст3кп-УО1 ГОСТ 30136–94, что позволило бы существенно снизить затраты на дальнейший передел катанки в проволоку в процессе ее волочения.

После запуска стана в эксплуатацию проведены случайные выборочные измерения диаметра катанки при настройке стана на готовый профиль минимального диаметра, удовлетворяющий требованиям стандартов по точности прокатки. Результаты этих измерений приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Данные измерений диаметра катанки *Y*, произведенной по новой технологии (с использованием чистового блока клетей), мм

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5,46	5,36	5,51	5,62	5,61	5,66	5,27	5,47	5,60	5,38
Номер измерения	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	5,42	5,32	5,31	5,39	5,41	5,28	5,43	5,45	5,50	5,45
Номер измерения	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	5,46	5,45	5,62	5,48	5,47	5,44	5,69	5,58	5,73	5,42

Необходимо с помощью имеющихся опытных данных для старой (без применения чистового блока клетей) и для новой (с применением ЧБК) технологии при уровне значимости 5 % провести статистический анализ, в котором используют следующий алгоритм:

1. Расчет точечных оценок основных генеральных числовых характеристик случайной величины диаметра катанки (математического ожидания, генеральной дисперсии и генерального стандартного отклонения).

2. Определение вида эмпирического закона распределения вероятности опытных данных.

3. Проверка на наличие резко выделяющихся инородных значений среди результатов измерений диаметра катанки.

4. Расчет двусторонних интервальных оценок основных генеральных числовых характеристик диаметра катанки.

5. Определение количества измерений, которые необходимо провести дополнительно для того, чтобы оценить математическое ожи-

дание диаметра катанки с точностью 0,01 мм и стандартное отклонение с точностью 0,1.

6. Определение вероятности попадания диаметра в поле допуска по ГОСТу.

7. Расчет значения диаметра, которое не будет превышено с заданной вероятностью.

8. Определить, влияет ли установка чистового блока клетей на точность прокатки.

9. Определить, повлияла ли установка чистового блока клетей на возможность получения катанки меньшего диаметра.

Пример расчета по данному алгоритму приведен в подглаве 5.1.

5.1. Расчет точечных оценок

Всю обработку опытных данных удобно производить в табличной форме, например, как это сделано в табл. 5.3 (столбцы таблицы будут использованы не только для текущего, но и для последующих расчетов, по мере надобности).

Таблица 5.3

Результаты расчета

Номер измерения	Исходные массивы данных		Квадраты опытных значений		Ранжированные опытные данные		Эмпирические вероятности
	X	Y	X^2	Y^2	$X_{возр}$	$Y_{возр}$	$P_{ix} = P_{iy}$
1	5,99	5,46	35,8801	29,8116	5,69	5,27	0,0333
2	5,95	5,36	35,4025	28,7535	5,71	5,28	0,0667
3	6,22	5,51	38,6884	30,3601	5,72	5,31	0,1
4	6,01	5,62	36,1201	31,5844	5,73	5,32	0,1333
5	6,00	5,61	36,0000	31,4721	5,77	5,36	0,1667
6	5,73	5,66	32,8329	32,0356	5,83	5,38	0,2
7	6,04	5,27	36,4816	27,7729	5,86	5,39	0,2333
8	5,86	5,47	34,3396	29,9209	5,86	5,41	0,2667
9	5,95	5,60	35,4025	31,3600	5,86	5,42	0,3
10	5,91	5,38	34,9281	28,9444	5,91	5,42	0,3333
11	6,06	5,42	36,7236	29,3764	5,93	5,43	0,3667
12	5,93	5,32	35,1649	28,3024	5,93	5,44	0,4
13	6,09	5,31	37,0881	28,1961	5,95	5,45	0,4333

Окончание табл. 5.3

Номер изме-рения	Исходные масси-вы данных		Квадраты опытных значений		Ранжированные опытные данные		Эмпирические вероятности
	X	Y	X^2	Y^2	$X_{\text{возр}}$	$Y_{\text{возр}}$	$P_{ix} = P_{iy}$
14	6,12	5,39	37,4544	29,0521	5,95	5,45	0,4667
15	6,16	5,41	37,9456	29,2681	5,98	5,45	0,5
16	6,05	5,28	36,6025	27,8784	5,99	5,46	0,5333
17	5,72	5,43	32,7184	29,4849	6,00	5,46	0,5667
18	6,19	5,45	38,3161	29,7025	6,00	5,47	0,6
19	5,86	5,50	34,3396	30,2500	6,01	5,47	0,6333
20	5,93	5,45	35,1649	29,7025	6,04	5,48	0,6667
21	6,27	5,46	39,3129	29,8116	6,05	5,50	0,7
22	6,55	5,45	42,9025	29,7025	6,06	5,51	0,7333
23	6,00	5,62	36,0000	31,5844	6,07	5,58	0,7667
24	5,71	5,48	32,6041	30,0304	6,09	5,60	0,8
25	5,83	5,47	33,9889	29,9209	6,12	5,61	0,8333
26	5,98	5,44	35,7604	29,5936	6,16	5,62	0,8667
27	5,69	5,69	32,3761	32,3761	6,19	5,62	0,9
28	6,07	5,58	36,8449	31,1364	6,22	5,66	0,9333
29	5,86	5,73	34,3396	32,8329	6,27	5,69	0,9667
30	5,77	5,42	33,2929	29,3764	6,55	5,73	1
Σ	179,50	334,7993	1075,0162	899,5941	179,50	334,7993	

В табл. 5.3 (и в дальнейшем) приняты обозначения: X — случайная величина диаметра катанки, произведенной по старой технологии (без ЧБК), мм; Y — случайная величина диаметра катанки, произведенной по новой технологии (с применением ЧБК), мм. Последняя строка таблицы предназначена для суммы всех числовых значений соответствующего столбца (обозначено символом Σ).

Точечными оценками основных генеральных числовых характеристик являются:

- для математического ожидания μ — среднее арифметическое $\bar{x}$ (3.1);
- для генеральной дисперсии σ^2 — выборочная дисперсия s^2 (3.2);
- для генерального стандартного отклонения σ — выборочное стандартное отклонение s (3.5).

Рассчитаем среднее арифметическое:

- для старой технологии $\bar{x} = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} x_i = \frac{1}{30}179{,}50 = 5{,}98$ мм;
- для новой технологии $\bar{y} = \frac{1}{N_y}\sum_{i=1}^{N_y} y_i = \frac{1}{30}164{,}24 = 5{,}47$ мм,

где значения сумм $\sum_{i=1}^{N_x} x_i$ и $\sum_{i=1}^{N_y} y_i$ взяты из последней строки табл. 5.3.

Для проведения «ручных» расчетов выборочной дисперсии удобней пользоваться не исходным выражением (3.2), следующим из определения этой величины, а преобразованиями этого уравнения к одному из видов — (3.3) или (3.4).

Воспользуемся уравнением (3.3) $s^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]$.

Для вычисления этого выражения необходимо провести расчет суммы квадратов опытных значений $\sum_{i=1}^{N_x} x_i^2$ и $\sum_{i=1}^{N_y} y_i^2$. Результаты расчета этих сумм представлены в табл. 5.3, при этом предварительно были сформированы столбцы квадратов опытных значений X^2 и Y^2.

В результате получим:

- для старой технологии

$$s_x^2 = \frac{1}{N_x-1}\left[\sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 - \frac{1}{N_x}\left(\sum_{i=1}^{N_x} x_i\right)^2\right] = \frac{1}{30-1}\left[1075{,}0162 - \frac{1}{30}(179{,}50)^2\right] = 0{,}0348\ \text{мм}^2;$$

- для новой технологии

$$s_y^2 = \frac{1}{N_y-1}\left[\sum_{i=1}^{N_y} y_i^2 - \frac{1}{N_y}\left(\sum_{i=1}^{N_y} y_i\right)^2\right] = \frac{1}{30-1}\left[899{,}5941 - \frac{1}{30}(164{,}24)^2\right] = 0{,}0142\ \text{мм}^2.$$

Рассчитаем выборочное стандартное отклонение:

- для старой технологии $s_x = +\sqrt{s_x^2} = +\sqrt{0{,}0348} = 0{,}19$ мм;
- для новой технологии $s_y = +\sqrt{s_y^2} = +\sqrt{0{,}0142} = 0{,}12$ мм.

Следует обратить внимание на точность получаемых расчетных значений. В соответствии с общепринятыми правилами обработки опытных данных точность (количество значащих цифр, в том числе и после запятой) любых величин, имеющих ту же размерность, что и опытные данные, должна быть равна точности использованных опытных данных. А точность величин, размерность которых содержит знак умножения (в том числе и степени размерности), должна быть равна произведению точностей величин, использованных для расчета (при этом количество значащих цифр складывается). Округление полученных в результате расчетов величин производится по общим правилам, используемым в математике (до 5 округление производится в меньшую сторону, после 5 включительно — в большую сторону). В нашем случае диаметр катанки измерен в миллиметрах с точностью 2 знака после запятой. Поэтому точность среднего арифметического и выборочного стандартного отклонения, измеряемых в миллиметрах, должна составлять 2 знака после запятой, а точность выборочного стандартного отклонения, измеряемого в миллиметрах в квадрате, должна составлять 4 знака после запятой.

Для удобства последующего использования сведем рассчитанные числовые характеристики в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Выборочные числовые характеристики случайных величин X и Y

Случайная величина	Среднее арифметическое $\bar{x}$	Выборочная дисперсия s^2	Выборочное стандартное отклонение s_x
X (старая технология)	5,98	0,0348	0,19
Y (новая технология)	5,47	0,0142	0,12

5.2. Определение вида эмпирического закона распределения

Выявление вида (типа) эмпирического закона распределения вероятности опытных данных проведем в соответствии с идеологией, изложенной в подглаве 4.4. Весь процесс идентификации будем проводить в два этапа:

- этап 1 — подбор подходящего теоретического закона распределения, наилучшим образом описывающего закономерность изменения вероятностных свойств случайной величины;
- этап 2 — проверка соответствия опытных данных модельному теоретическому закону распределения с использованием критериев согласия.

5.2.1. Подбор подходящего теоретического закона распределения

На первом этапе идентификации произведем выбор вида модельного теоретического закона распределения, качественно правильно описывающего эмпирический закон распределения имеющихся опытных данных. Для этого проведем построение эмпирических графиков функции распределения и плотности распределения и визуально сопоставим их с известными кривыми теоретических законов распределения.

Построение эмпирических графиков функции распределения

Для подготовки данных, необходимых для построения этих графиков, будем использовать табл. 5.3, последовательно добавляя в нее необходимые столбцы.

Построение графиков функции распределения случайных величин X и Y проведем параллельно с использованием алгоритма, приведенного в подглаве 2.2:

1. В колонки $X_{возр}$ и $Y_{возр}$ табл. 5.3 запишем опытные значения из колонок X и Y той же таблицы, но в порядке возрастания их значений (ранжируем опытные данные по возрастающей) так, чтобы для случайной величины X выполнялось бы условие $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, а для Y — условие $y_1 \leq \ldots \leq y_N$ (см. табл. 5.3).

2. Количество опытных значений n_i, отвечающих условиям $X \leq x_i$ и $Y \leq y_i$ (это условие следует из определения функции распределения (2.1)) для каждой из этих случайных величин, будет совпадать с порядковым номером соответствующего опытного значения в ранжированном вариационном ряду $n_i = i$. Например, в колонке $X_{возр}$ для первого опытного значения $x_1 = 5{,}69$ условию $X \leq 5{,}69$ будет удовлетворять только само это значение 5,69 (за счет знака =, содержащегося в знаке ≤), поэтому $n_{1x} = 1$. Для второго опытного значения $x_2 = 5{,}71$ условию $X \leq 5{,}69$ будет удовлетворять предыдущее опытное значение 5,69 (за счет знака <) и само это значение 5,71 (за счет знака =), поэтому $n_{2x} = 2$ и т. д. для любого числового значения ранжированного числового ряда $n_{ix} = i$. Аналогично и для ранжированных числовых значений случайной величины Y, т. е. для колонки $Y_{возр}$ из табл. 5.3, также будет выпол-

няться равенство $n_{iy} = i$. Причем окажется, что $n_{1x} = n_{1y} = 1$, $n_{2x} = n_{2y} = 2$ и т. д. Поэтому строить отдельные столбцы n_{ix} и n_{iy} смысла нет, можно воспользоваться общим первым столбцом этой таблицы («Номер измерения»).

3. Рассчитаем для каждого опытного значения x_i и y_i статистическую вероятность непревышения этого значения P_{ix} и P_{iy} соответствующей случайной величиной X или Y по выражению $P_i = \frac{n_i}{N}$. Поскольку для рассматриваемых случайных величин X и Y объемы имеющихся выборок одинаковы ($Nx = Ny = N$) и столбцы n_{ix} и n_{iy} заменены на общий столбец порядкового номера (первый столбец), то и значения соответствующих элементов столбцов эмпирических вероятностей P_{ix} и P_{iy} совпадут. Поместим расчетные вероятности в общую колонку $P_{ix} = P_{iy}$ табл. 5.3.

4. Для каждой из случайных величин X и Y в отдельности на соответствующей координатной плоскости X-0-$F(x)$ или Y-0-$F(y)$ отложим все N двумерных точек с координатами (x_i, P_{ix}) — для случайной величины X и (y_i, P_{iy}) — для случайной величины Y (рис. 5.1–5.2).

5. Проведя через полученные точки каждого из графиков плавную кривую, получим показанные на рис. 5.1 и 5.2 эмпирические графики функции распределения для непрерывных случайных величин X и Y.

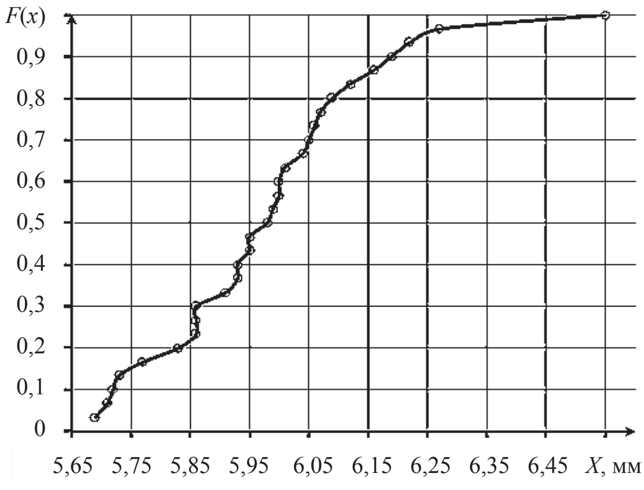


Рис. 5.1. Эмпирический график функции распределения случайной величины X (диаметра катанки, произведенной по старой технологии)

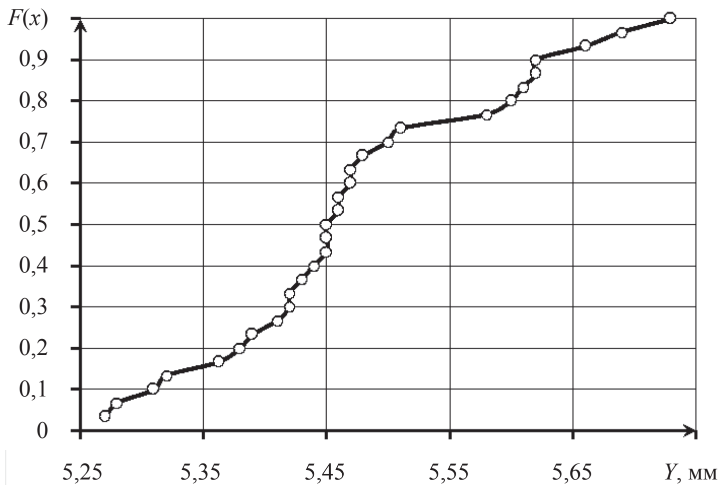


Рис. 5.2. Эмпирический график функции распределения случайной величины Y (диаметра катанки, произведенной по новой технологии)

Построение эмпирических графиков плотности распределения

Учитывая значительную общность случайных величин X и Y, построение графиков плотности распределения этих случайных величин проводится параллельно с использованием алгоритма, приведенного в подглаве 2.3:

1. При построении эмпирических графиков функции распределения случайных величин X и Y опытные значения уже расположены в вариационных рядах по возрастающей в столбцах $X_{возр}$ и $Y_{возр}$ табл. 5.3. Воспользуемся этими столбцами.

2. Рассчитаем ширину интервалов варьирования опытных данных рассматриваемых случайных величин X и Y:

$$L_x = x_N - x_1 = 6{,}55 - 5{,}69 = 0{,}86 \text{ мм};$$

$$L_y = y_N - y_1 = 5{,}73 - 5{,}27 = 0{,}46 \text{ мм}.$$

3. Для того чтобы разбить большой интервал варьирования опытных данных на элементарные интервалы (их называют так же «карманы»), необходимо выбрать количество таких интервалов k.

Рассчитаем k по разным формулам:

- формула Старджесса

$$k = \log_2 N + 1 = 3{,}31\lg N + 1 = 3{,}31\lg 30 + 1 = 5{,}89 \approx 6;$$

- формула Брукса и Коррузера $k = 5\lg N = 5\lg 30 = 7{,}39 \approx 7$;
- формула Хаинхольда и Гаеде $k = \sqrt{N} = \sqrt{30} = 5{,}48 \approx 5$.

По упрощенному правилу количество k следует выбирать максимальным, но так, чтобы оно не превышало $N/5$ [12, с. 205] $N/5=30/5=6$, отсюда получим $k = 6$.

Получили, что можно использовать хотя и близкое, но разное количество интервалов разбиения: 5, 6 или 7, следуя разным рекомендациям. Предварительно проводятся необходимые расчеты, результаты которых помещаются в табл. 5.5–5.7. Затем для сравнения строятся эмпирические графики плотности распределения для всех этих трех вариантов.

Таблица 5.5

Ширина интервалов разбиения $\Delta x = L/k$ размаха опытных данных L для случайных величин X и Y при использовании разного количества интервалов k

Параметр	Случайная величина					
	X			Y		
Количество интервалов разбиения k	5	6	7	5	6	7
Ширина интервала разбиения Δx	0,17	0,14	0,12	0,09	0,08	0,07

Таблица 5.6

Данные для построения эмпирического графика плотности распределения для случайной величины X

Номер п/п	k														
	5					6					7				
	$x_i^{Лев}$	$x_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$	$x_i^{Лев}$	$x_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$	$x_i^{Лев}$	$x_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$
1	5,69	5,86	7	0,23	1,36	5,69	5,83	6	0,20	1,40	5,69	5,81	5	0,17	1,36
2	5,86	6,03	12	0,40	2,33	5,83	5,98	9	0,30	2,09	5,81	5,94	7	0,23	1,90
3	6,03	6,21	8	0,27	1,55	5,98	6,12	10	0,33	2,33	5,94	6,06	10	0,33	2,71
4	6,21	6,38	2	0,07	0,39	6,12	6,26	3	0,10	0,70	6,06	6,18	4	0,13	1,09
5	6,38	6,55	1	0,03	0,19	6,26	6,41	1	0,03	0,23	6,18	6,30	3	0,10	0,81
6	–	–	–	–	–	6,41	6,55	1	0,03	0,23	6,30	6,43	0	0,00	0,00
7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6,43	6,55	1	0,03	0,27

Таблица 5.7

Данные для построения эмпирического графика плотности распределения для случайной величины Y

Номер п/п	k														
	5					6					7				
	$y_i^{Лев}$	$y_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$	$y_i^{Лев}$	$y_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$	$y_i^{Лев}$	$y_i^{Пр}$	n_i	P_i	$\bar{f}_i$
1	5,27	5,36	5	0,17	1,81	5,27	5,35	4	0,13	1,74	5,27	5,34	4	0,13	2,03
2	5,36	5,45	10	0,33	3,62	5,35	5,42	6	0,20	2,61	5,34	5,40	3	0,10	1,52
3	5,45	5,55	7	0,23	2,54	5,42	5,50	11	0,37	4,78	5,40	5,47	12	0,40	6,09
4	5,55	5,64	5	0,17	1,81	5,50	5,58	2	0,07	0,87	5,47	5,53	3	0,10	1,52
5	5,64	5,73	3	0,10	1,09	5,58	5,65	4	0,13	1,74	5,53	5,60	2	0,07	1,01
6	–	–	–	–	–	5,65	5,73	3	0,10	1,30	5,60	5,66	4	0,13	2,03
7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5,66	5,73	2	0,07	1,01

Последовательно для каждого интервала k_i рассчитаем величины из п. 4–6, с. 141–149. Полученные значения приведены для случайной величины X в табл. 5.6, а для случайной величины Y — в табл. 5.7.

4. Рассчитываются значения левой $x_i^{Лев}$ и правой $x_i^{Пр}$ границ элементарных интервалов $x_i^{Пр} = x_i^{Лев} + \Delta x$, $x_i^{Лев} = x_{i-1}^{Пр}$, начиная от левой границы первого интервала $x_1^{Лев} = x_1$. За правую границу последнего k-го элементарного интервала принимается последнее опытное значение в вариационном ряду $x_k^{Пр} = x_N$.

5. Используя ранжированный вариационный ряд $X_{возр}$ из табл. 5.2 и границы интервалов разбиения $x_i^{Лев}$ и $x_i^{Пр}$ из п. 4, определяют количество опытных значений n_i, попавших в каждый интервал, отвечающих условию $x_i^{Лев} < X \le x_i^{Пр}$.

6. Рассчитывается эмпирическая статистическая вероятность попадания значений случайной величины в каждый интервал $P_i = \dfrac{n_i}{N}$ и среднее для интервала значение плотности распределения $\bar{f}_i = \dfrac{P_i}{\Delta x}$. Все рассчитываемые величины для случайной величины X заносятся в табл. 5.6, а для случайной величины X — в табл. 5.7.

7. Используя данные табл. 5.6 и разные координатные плоскости X-0-$f(x)$ для разных значений k, на оси абсцисс откладывают границы элементарных интервалов $x_i^{Лев}$ и $x_i^{Пр}$ и выстраивают на каждом i-м

интервале столбик высотой $\overline{f_i}$, гистограмму распределения частот (рис. 5.3, *а* — 5.3, *в*).

8. Аналогично строим гистограмму распределения частот и для случайной величины *Y*, используя данные табл. 5.7. Результат показан на рис. 5.3, *г* — 5.3, *е*.

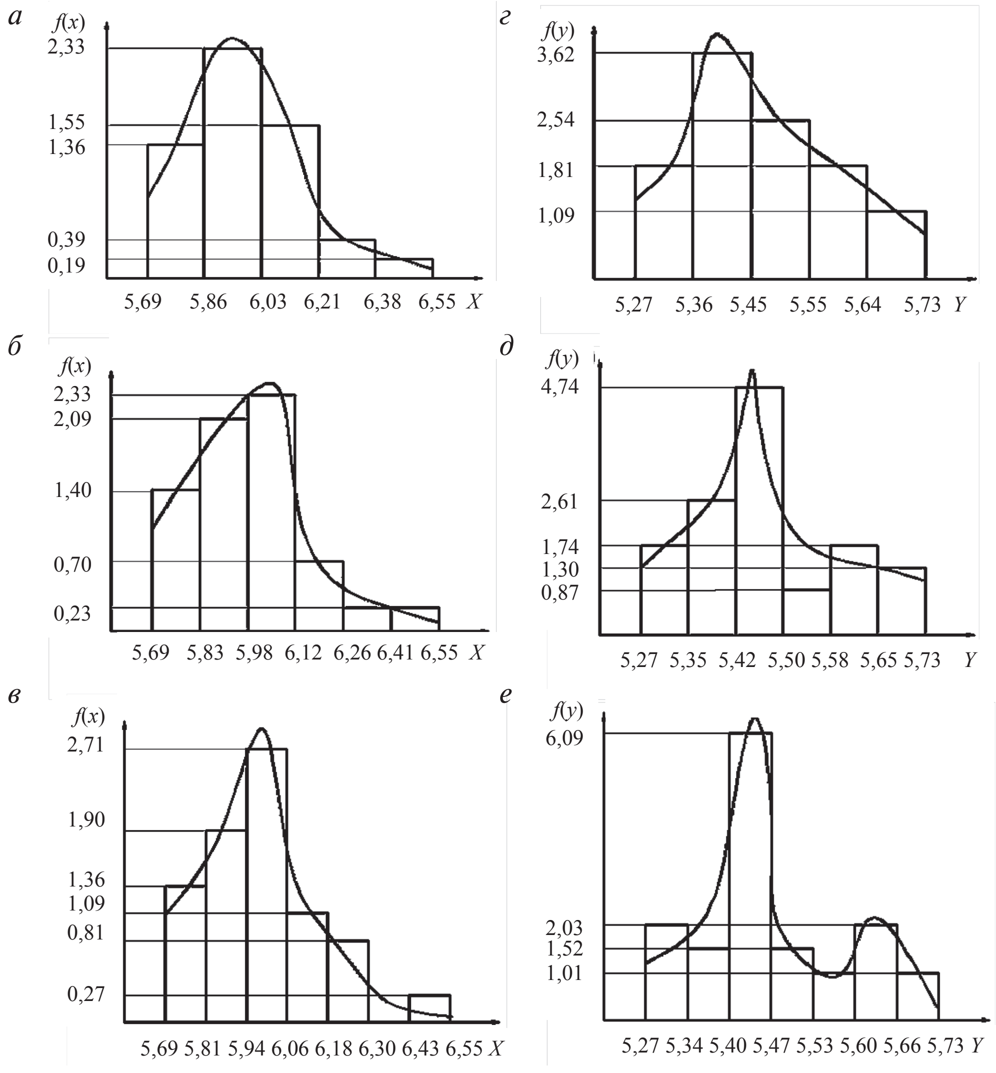


Рис. 5.3. Графики плотности распределения для случайных величин *X* при $k = 5$ (*а*), $k = 6$ (*б*), $k = 7$ (*в*) и *Y* при $k = 5$ (*г*), $k = 6$ (*д*), $k = 7$ (*е*)

9. Используя гистограммы (рис. 5.3), построим в этих же системах координат соответствующие графики плотности распределения: проводим кривые таким образом, чтобы в пределах каждого интервала (или двух соседних интервалов на рис. 5.3, *б*, *в*, *д*, *е*) площадь столбика равнялась бы площади криволинейной трапеции, расположенной под кривой.

Из сопоставления построений на рис. 5.3 видно, что вне зависимости от принятого количества интервалов разбиения всего размаха опытных данных кривые и их местоположение для каждой из случайных величин достаточно близки. Однако наиболее простыми, монотонными и с наименьшими приближениями являются графики на рис. 5.3, *а*, *г*, построенные на основе гистограмм распределения частот при пяти интервалах разбиения ($k = 5$) опытных данных. Разбиение на 6 и 7 интервалов привело к чрезмерно подробному разбиению на интервалы и возникновению интервалов с очень малой эмпирической вероятностью попадания значений случайной величины (провалы на гистограмме), что, в свою очередь, вносит заметные искажения в эмпирический график плотности распределения.

Выбор модельного распределения

Сравнивая полученные графики функции распределения (см. рис. 5.1 и 5.2) и плотности распределения (см. рис. 5.3) для рассматриваемых случайных величин с аналогичными кривыми для теоретических распределений из справочников и учебников, часть из которых приведена в подглаве 2.4, можно прийти к заключению, что эмпирические кривые наиболее похожи на соответствующие теоретические кривые для нормального закона распределения (см. п. 2.4.2, рис. 2.7 и 2.8).

На рис. 5.4 и 5.5 показаны эмпирические графики функции распределения для рассматриваемых случайных величин X и Y (ранее приведенные на рис. 5.1 и 5.2) с наложением на них теоретических кривых функции нормального закона распределения, построенные для диапазонов изменения опытных данных из табл. 5.3 и параметров распределения из табл. 5.4.

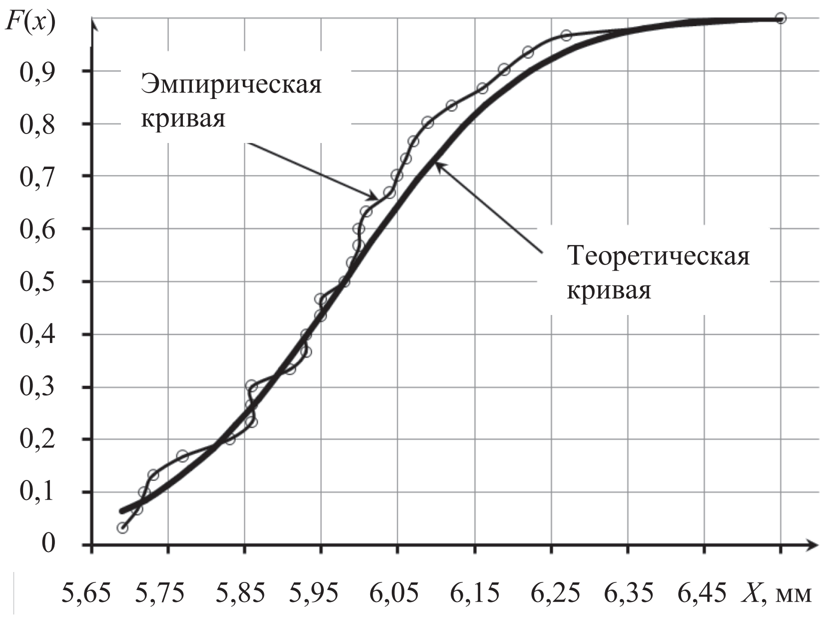


Рис. 5.4. Эмпирический и теоретический графики функции распределения случайной величины X (диаметра катанки, произведенной по старой технологии)

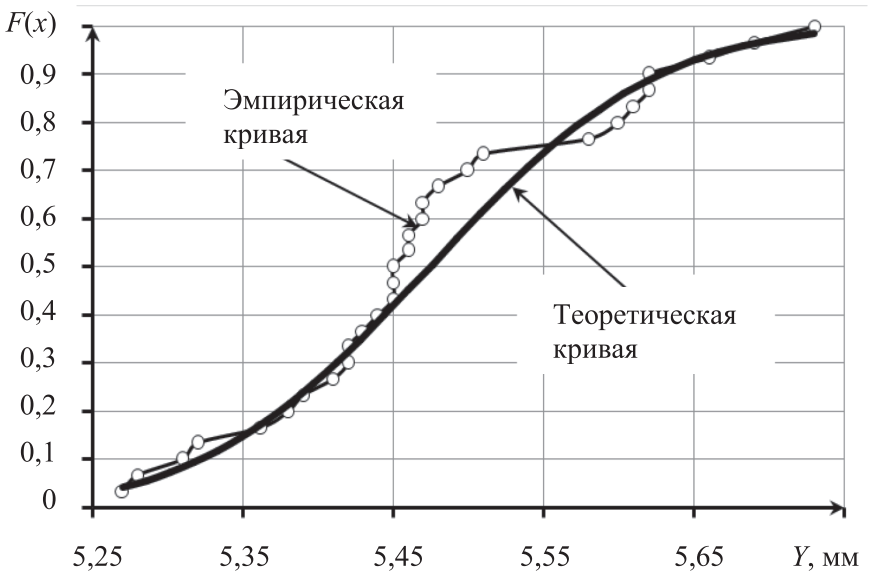


Рис. 5.5. Эмпирический и теоретический графики функции распределения случайной величины Y (диаметра катанки, произведенной по новой технологии)

На рис. 5.6 и 5.7 показаны эмпирические графики плотности распределения для тех же случайных величин *X* и *Y*, построенные при $k = 5$ интервалах (рис. 5.3, а и 5.3, *г*) с наложением на них теоретических кривых плотности нормального закона распределения, при параметрах из табл. 5.4.

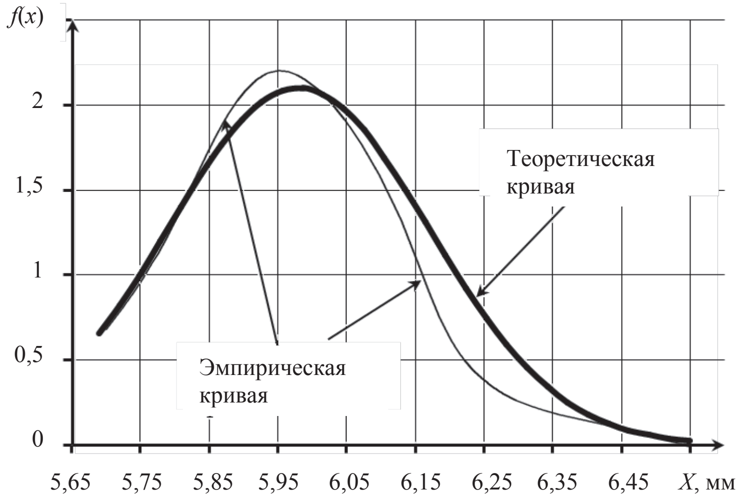


Рис. 5.6. Эмпирический и теоретический графики плотности распределения случайной величины *X* (диаметра катанки, произведенной по старой технологии)

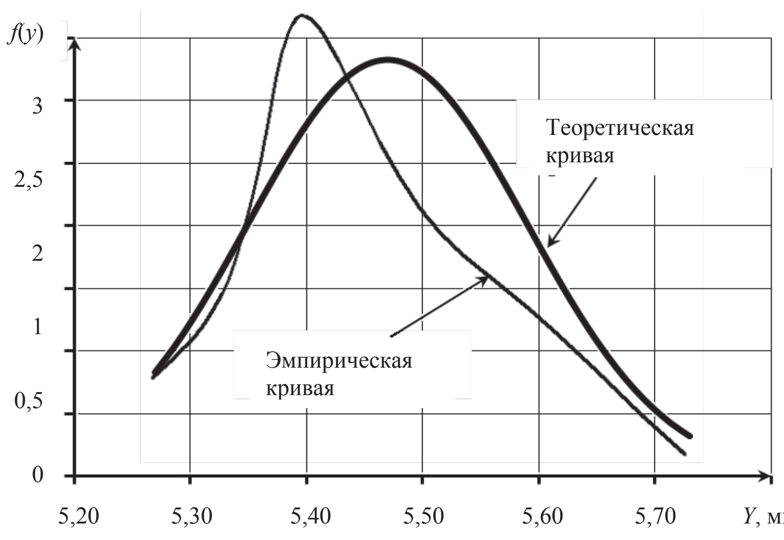


Рис. 5.7. Эмпирический и теоретический графики плотности распределения случайной величины *Y* (диаметра катанки, произведенной по новой технологии)

Из приведенных рисунков видно, что качественное, эмпирическое распределение опытных значений случайных величин X и Y достаточно близко к теоретическому нормальному закону распределения, поэтому выберем этот закон в качестве модельного.

5.2.2. Проверка соответствия опытных данных модельному теоретическому закону распределения

Для строгой количественной проверки соответствия опытных данных случайных величин X и Y нормальному закону распределения используем статистические критерии согласия. Будем использовать разные критерии.

Проверка нормальности распределения случайной величины X с использованием критерия χ^2 (критерий согласия Пирсона)

Проверка нормальности закона распределения случайной величины X (диаметр катанки, произведенной по старой технологии) проводится с использованием критерия согласия χ^2. Данный критерий относится к группе универсальных критериев и рекомендуется для использования при больших объемах выборки (считается, что обладает высокой мощностью при $N > 100$). Но поскольку рассматриваемая задача носит прежде всего учебный характер, то оставим данное ограничение без внимания.

Проверку проведем в соответствии с принятым в данном учебном пособии общим алгоритмом, приведенным для рассматриваемого случая в п. 4.5.1:

1. *Формулируется нулевая гипотеза* H_0: $F^{Э}(x) = N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение не противоречит теоретическому нормальному закону распределения $N(\mu,\sigma)$ с параметрами μ и σ, оцененными в подглаве 5.1 (см. табл. 5.4) при помощи среднего арифметического $\bar{x} = 5{,}98$ мм и несмещенной выборочной дисперсии $s_x^2 = 0{,}0348$ мм^2 (выборочное стандартное отклонение $s = 0{,}19$ мм).

2. *Формулируется альтернативная гипотеза* H_1: $F^{Э}(x) \neq N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ подчиняется какому-то другому закону распределения.

3. *Выбирается критерий для проверки H_0.* В данном случае это лишь формальный пункт, т. к. рассматривается критерий согласия Пирсона (χ^2-критерий).

4. Рассчитывается статистика*, относящ*аяся к выбранному критерию. Статистикой χ^2-критерия является величина (4.17)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - Np_i\right)^2}{Np_i},$$

где k — количество интервалов разбиения Δx_i всего размаха опытных данных; n_i — количество опытных значений $x_j \left(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N\right)$ из выборки, попавших в i-й интервал Δx_i; N — объем выборки; p_i — теоретическая вероятность попадания значения случайной величины в i-й интервал Δx_i.

Достаточно важным при использовании критерия χ^2 (и ему подобных) является выбор количества интервалов k разбиения всего размаха варьирования опытных данных (элементарных интервалов, или карманов), т. к. это влияет на мощность критерия [8]. При построении эмпирического графика плотности распределения (см. с. 211–215) по разным формулам, рекомендованным в [12], рассчитаны разные значения k (5, 6 и 7) для одного и того же объема выборки $N = 30$. Для сравнения проводится расчет статистики χ^2 по формуле (4.17) для этих значений k. Расчет удобно произвести в табличном виде, например, как это показано в табл. 5.8–5.10.

Процедура расчета статистики χ^2 имеет некоторое количество одинаковых действий с процедурой подготовки данных для построения эмпирического графика плотности распределения, рассмотренной в на с. 211–215, поэтому частично можно воспользоваться полученными там результатами, сведенными в табл. 5.6. Из данной таблицы для расчета статистики χ^2 использованы столбцы:

- $x_i^{\text{Лев}}$ и $x_i^{\text{Пр}}$ — левая и правая границы i-го элементарного интервала;
- n_{i} — количество опытных значений из табл. 5.1, попавших в i-й элементарный интервал.

В зависимости от выбранного количества элементарных интервалов k числовые данные из этих столбцов табл. 5.6 помещены в одну из табл. 5.8–5.10.

Важно отметить, что при расчете теоретической вероятности p_i в качестве левой границы первого интервала следует использовать не первое опытное значение в вариационном ряду x_1, а значение $x_1^{\text{Лев}} = -\infty$. Для последнего ($k$-го) интервала правая граница также должна охватывать все принципиально возможные «правые» значения случайной величины, т. е. следует принимать $x_i^{\text{Пр}} = +\infty$, а не x_N. Поэтому, в отличие от табл. 5.6, в табл. 5.8–5.10 первое значений 5,69 заменено на $-\infty$, а последнее значение 6,55 заменено на $+\infty$.

Проверка проводится на соответствие нормальному закону распределения, поэтому при расчете теоретической вероятности p_i попадания значения случайной величины X в элементарный интервал можно воспользоваться стандартизованным нормальным законом распределения (см. п. 2.4.3 и прил. 1). Для этого следует рассчитать нормированные значения левой и правой границ элементарных интервалов $U_i^{\text{Лев}}$ и $U_i^{\text{Пр}}$, используя операцию нормирования (2.17):

$$U_i^{\text{Лев}} = \frac{x_i^{\text{Лев}} - \overline{x}}{s_x}, \tag{5.1}$$

$$U_i^{\text{Пр}} = \frac{x_i^{\text{Пр}} - \overline{x}}{s_x}, \tag{5.2}$$

где неизвестные генеральные параметры распределения — математическое ожидание μ и генеральное стандартное отклонение σ — заменены на их $\overline{x}$ (среднее арифметическое) и s_x (выборочное стандартное отклонение), числовые значения которых можно выбрать из табл. 5.4.

Значения функции нормированного нормального распределения $\Phi\left(U_i^{\text{Лев}}\right)$ и $\Phi\left(U_i^{\text{Пр}}\right)$ для нормированных границ $U_i^{\text{Лев}}$ из формулы (5.1) и $U_i^{\text{Пр}}$ из формулы (5.2) можно определить по справочными таблицами значений этой функции (прил. 1) или воспользоваться статистическими функциями Excel (см. подглаву 2.2).

Теоретическая вероятность попадания значения случайной величины X в i-й элементарный интервал составит

$$p_i = \Phi\left(U_i^{\textit{Пр}}\right) - \Phi\left(U_i^{\text{Лев}}\right).$$

Произведение Np_i в выражении (4.17) представляет собой теоретическое количество опытных значений $n_i^{\text{Т}}$, которые должны оказаться в рассматриваемом элементарном интервале Δx_i, если для теоретического закона распределения произвести расчет N значений рассматриваемой случайной величины.

В результате проведения таких расчетов получены табл. 5.8–5.10.

В последней строке каждой таблицы (обозначенных знаком Σ) помещена сумма значений элементов соответствующего столбца. В нижней правой ячейке каждой таблицы приведено рассчитанное значение статистики χ^2 (4.17) для соответствующего количества элементарных интервалов разбиения всего размаха опытных данных k.

Таблица 5.8

Результаты расчета статистики χ^2 при $k = 5$ элементарных интервалов

Номер п/п	$x_i^{Лев}$	$x_i^{Пр}$	n_i	$U_i^{Лев}$	$U_i^{Пр}$	$\Phi(U_i^{Лев})$	$\Phi(U_i^{Пр})$	p_i	Np_i	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
1	$-\infty$	5,86	7	–1,57	–0,65	0,00	0,26	0,26	8	0,068
2	5,86	6,03	12	–0,65	0,27	0,26	0,61	0,35	10	0,219
3	6,03	6,21	8	0,27	1,19	0,61	0,88	0,28	8	0,011
4	6,21	6,38	2	1,19	2,12	0,88	0,98	0,10	3	0,317
5	6,38	$+\infty$	1	2,12	3,04	0,98	1,00	0,02	1	0,460
Σ	–	–	30	–	–	–	–	1,0	30	1,075

Таблица 5.9

Расчет статистики χ^2 при $k = 6$ элементарных интервалов

Номер п/п	$x_i^{Лев}$	$x_i^{Пр}$	n_i	$U_i^{Лев}$	$U_i^{Пр}$	$\Phi(U_i^{Лев})$	$\Phi(U_i^{Пр})$	p_i	Np_i	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
1	$-\infty$	5,83	6	–1,57	–0,80	0,00	0,21	0,21	6	0,016
2	5,83	5,98	9	–0,80	–0,04	0,21	0,49	0,28	8	0,067
3	5,98	6,12	10	–0,04	0,73	0,49	0,77	0,28	8	0,274
4	6,12	6,26	3	0,73	1,50	0,77	0,93	0,17	5	0,772
5	6,26	6,41	1	1,50	2,27	0,93	0,99	0,05	2	0,256
6	6,41	6,55	1	2,27	3,04	0,99	1,00	0,01	0	1,226
Σ	–	$+\infty$	30	–	–	–	–	1,0	30	2,611

Таблица 5.10

Расчет статистики χ^2 при $k = 7$ элементарных интервалов

Номер п/п	$x_i^{\text{Лев}}$	$x_i^{\text{Пр}}$	n_i	$U_i^{\text{Лев}}$	$U_i^{\text{Пр}}$	$\Phi(U_i^{\text{Лев}})$	$\Phi(U_i^{\text{Пр}})$	p_i	Np_i	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
1	$-\infty$	5,81	5,00	–1,57	–0,91	0,00	0,18	0,18	5	0,031
2	5,81	5,94	7,00	–0,91	–0,26	0,18	0,40	0,22	7	0,028
3	5,94	6,06	10,00	–0,26	0,40	0,40	0,66	0,26	8	0,669
4	6,06	6,18	4,00	0,40	1,06	0,66	0,86	0,20	6	0,655
5	6,18	6,30	3,00	1,06	1,72	0,86	0,96	0,10	3	0,001
6	6,30	6,43	0,00	1,72	2,38	0,96	0,99	0,03	1	1,018
7	6,43	6,55	1,00	2,38	3,04	0,99	1,00	0,01	0	2,117
Σ	–	–	30	–	–	–	–	1,0	30	4,518

5. *Граница критической области* $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определяется как квантиль распределения Пирсона (прил. 6) в зависимости от принятого уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $\nu = k - c - 1$, где c — количество параметров теоретического распределения, оцененных по выборке. В рассматриваемом случае $c = 2$.

Для разных значений количества элементарных интервалов k из прил. 6 выберем соответствующие значения квантилей распределения Пирсона $\chi^2_{\alpha,\nu}$. Эти значения приведены в табл. 5.11. Там же приведены расчетные значения статистики χ^2 из формулы (4.17).

Таблица 5.11

Значения статистики χ^2 и границы критической области $\chi^2_{\alpha,\nu}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и разных значениях количества элементарных интервалов k

k	5	6	7
χ^2	1,075	2,611	4,518
ν	2	3	4
$\chi^2_{\alpha,\nu}$	5,991	7,815	9,488

Граница критической области $\chi^2_{\alpha,\nu}$ является правосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается слева от нее (в области наибольшей вероятности для χ^2). Это можно проверить, используя рассмотренный в подглаве 4.1 метод пробной точки, приняв в качестве базовой гипотезы $H_{\text{Б}} = H_0$, а в качестве «комплексной пробной точки» — полное равенство рассматриваемых теоретического и эмпирического распределений (совпадение графиков теоретической и эмпирической плотностей распределения). При этом разность между гипотетическим количеством эмпирически опытных значений n_i и этим же значением для теоретического закона распределения $n_i^{\text{Т}} = Np_i$ для любого интервала Δx_i будет равна нулю.

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Для всех значений количества элементарных интервалов k справедливо соотношение $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha,\nu}$ (см. табл. 5.11), причем различие в значениях χ^2 и $\chi^2_{\alpha,\nu}$ весьма значительное, поэтому оснований отвергнуть нулевую гипотезу нет.

Вывод. Эмпирическое распределение случайной величины X с вероятностью не менее 95 % не противоречит нормальному закону распределения.

Проверка нормальности закона распределения случайной величины *Y* с использованием критерия согласия Колмогорова — Смирнова

Проверку нормальности закона распределения случайной величины Y (диаметр катанки, произведенной по новой технологии) проведем в учебных целях с использованием критерия согласия Колмогорова — Смирнова (по данным табл. 4.2) менее мощного, чем использованный выше критерий χ^2, но рекомендуемого к использованию при малых объемах выборок (при $N > 50$) [15–17, 20] и др. По мнению авторов этих книг, при малых объемах выборок мощность критерия согласия Колмогорова — Смирнова выше, чем мощность χ^2-критерия Пирсона. Опять же, т. к. рассматриваемая задача носит учебный характер, оставим ограничение $N > 50$ без внимания. Проверку проведем в соответствии с алгоритмом, приведенным для случая, описанного в п. 4.4.2.

Для проведения проверки по критерию Колмогорова — Смирнова необходимо исходную выборку опытных значений рассматриваемой случайной величины Y подвергнуть ранжированию, что проделано в табл. 5.3:

1. *Формулируется нулевая гипотеза* H_0: $F^{\text{Э}}(y) = N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение случайной величины Y не противоречит теоретическому нормальному закону распределения $N(\mu,\sigma)$

с параметрами μ и σ, оцененными в подглаве 5.1 (см. табл. 5.4) при помощи среднего арифметического $\bar{y} = 5{,}47$ мм и выборочной дисперсии $s_y^2 = 0{,}0142$ мм² (выборочное стандартное отклонение $s_y = 0{,}12$ мм).

2. *Формулируется альтернативная гипотеза* H_1: $F^{Э}(y) \neq N(\mu, \sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(y)$ подчиняется какому-то другому закону распределения.

3. *Выбирается критерий для проверки* H_0. Поскольку генеральные параметры распределения не известны, но оценены по выборке (при этом проверяемая гипотеза становится сложной), то используем специализированный критерий Колмогорова — Смирнова в соответствии с рекомендациями [9].

4. *Рассчитывается статистика, относящаяся к выбранному критерию*. Рассчитаем максимальное отклонение между опытным и гипотетическим значениями функции распределения по выражениям (4.19)—(4.21), которые при проверке на соответствие нормальному закону распределения и при использовании оценок параметров этого распределения можно записать в виде

$$\begin{cases} D_N^+ = \max_{1 \le i \le N} \left[\dfrac{i}{N} - \Phi\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) \right], \\ D_N^- = \max_{1 \le i \le N} \left[\Phi\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) - \dfrac{i-1}{N} \right], \end{cases} \tag{5.3}$$

$$D_N = \max\left[D_N^+; D_N^- \right], \tag{5.4}$$

где N — объем выборки; $y_i \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N\right)$ — текущее опытное значение случайной величины Y в ранжированном ряду значений $\left(y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_N\right)$; i — порядковый номер рассматриваемого опытного значения y_i в ранжированном вариационном ряду (см. табл. 5.3); $\Phi\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$ — значение теоретической функции стандартизованного нормального закона распределения, которое можно определить по данным прил. 1.

Для выявления значения D_N в табл. 5.12 произведем расчет отклонений $\dfrac{i}{N} - \Phi\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$ и $\Phi\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) - \dfrac{i-1}{N}$ по выражению (5.3).

Из табл. 5.11 выберем максимальные значения величин $D_N^+ = 0{,}149$ и $D_N^- = 0{,}087$, из которых условию (5.4) удовлетворяет значение $D_N = 0{,}149$.

Для сравнения произведем расчет всех статистик λ_i (i = 1, 2, ..., 4), рассмотренных в п. 4.4.2:

$$\lambda_1 = D_N\sqrt{N} = 0{,}149\sqrt{30} = 0{,}817,$$

$$\lambda_2 = D_N\left(\sqrt{N} + 0{,}12 + \frac{0{,}11}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}149\cdot\left(\sqrt{30} + 0{,}12 + \frac{0{,}11}{\sqrt{30}}\right) = 0{,}838,$$

$$\lambda_3 = D_N\left(\sqrt{N} + 0{,}01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}149\cdot\left(\sqrt{30} + 0{,}01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{30}}\right) = 0{,}839,$$

$$\lambda_4 = \frac{6ND_N + 1}{6\sqrt{N}} = \left(\frac{6\cdot 30\cdot 0{,}149 + 1}{6\sqrt{30}}\right) = 0{,}849.$$

Таблица 5.12

Результаты расчета при использовании критерия Колмогорова — Смирнова

I	y_i	$\frac{i}{N}$	$\frac{i-1}{N}$	$U = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$	$\Phi(U)$	$\frac{i}{N} - \Phi(U)$	$\Phi(U) - \frac{i-1}{N}$
1	5,27	0,033	0,000	–1,721	0,043	–0,009	0,043
2	5,28	0,067	0,033	–1,637	0,051	0,016	0,017
3	5,31	0,100	0,067	–1,385	0,083	0,017	0,016
4	5,32	0,133	0,100	–1,301	0,097	0,037	–0,003
5	5,36	0,167	0,133	–0,946	0,172	–0,005	0,039
6	5,38	0,200	0,167	–0,796	0,213	–0,013	0,046
7	5,39	0,233	0,200	–0,712	0,238	–0,005	0,038
8	5,41	0,267	0,233	–0,544	0,293	–0,026	0,060
9	5,42	0,300	0,267	–0,460	0,323	–0,023	0,056
10	5,42	0,333	0,300	–0,460	0,323	0,011	0,023
11	5,43	0,367	0,333	–0,376	0,353	0,013	0,020
12	5,44	0,400	0,367	–0,292	0,385	0,015	0,018
13	5,45	0,433	0,400	–0,208	0,418	0,016	0,018
14	5,45	0,467	0,433	–0,208	0,418	0,049	–0,016
15	5,45	0,500	0,467	–0,208	0,418	0,082	–0,049
16	5,46	0,533	0,500	–0,124	0,451	0,083	–0,049
17	5,46	0,567	0,533	–0,124	0,451	0,116	–0,083

Окончание табл. 5.12

I	y_i	$\frac{i}{N}$	$\frac{i-1}{N}$	$U=\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}$	$\Phi(U)$	$\frac{i}{N}-\Phi(U)$	$\Phi(U)-\frac{i-1}{N}$
18	5,47	0,600	0,567	–0,040	0,484	0,116	–0,083
19	5,47	0,633	0,600	–0,040	0,484	0,149	–0,116
20	5,48	0,667	0,633	0,044	0,518	0,149	–0,116
21	5,50	0,700	0,667	0,212	0,584	0,116	–0,083
22	5,51	0,733	0,700	0,296	0,617	0,117	–0,083
23	5,58	0,767	0,733	0,885	0,812	–0,045	0,079
24	5,60	0,800	0,767	1,053	0,854	–0,054	0,087
25	5,61	0,833	0,800	1,137	0,872	–0,039	0,072
26	5,62	0,867	0,833	1,221	0,889	–0,022	0,056
27	5,62	0,900	0,867	1,221	0,889	0,011	0,022
28	5,66	0,933	0,900	1,557	0,940	–0,007	0,040
29	5,69	0,967	0,933	1,809	0,965	0,002	0,031
30	5,73	1,000	0,967	2,146	0,984	0,016	0,017

5. *Граница критической области* λ_α определяется как квантиль распределения Колмогорова в зависимости от принятого уровня значимости $\alpha = 0,05$. Для рассчитанных выше статистик λ_i ($i = 1, 2, ..., 4$), применяемых при различных статистических ситуациях, распределение Колмогорова будет отличаться [9], поэтому и значения границ критической области будут различными (табл. 5.13). В этой же таблице приведем и рассчитанные выше значения статистик λ_i.

Таблица 5.13

Значения статистик λ_i и соответствующих им границ критических областей (квантилей λ_α распределения Колмогорова) при $\alpha = 0,05$

Статистика	λ_1 (5,6)	λ_2 (5,7)	λ_3 (5,8)	λ_4 (5,9)
Значение статистики	0,817	0,838	0,839	0,848
Граница критической области λ_α	1,358	1,358	0,895	0,904

Граница критической области λ_α для всех рассмотренных статистик λ_i является правосторонней границей, поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается слева от нее. Это можно проверить, используя метод пробной точки, приняв в качестве базовой гипотезы H_0, а в качестве комплексной пробной точки — полное совпадение кривых функции эмпирического распределения $\frac{i}{N}$ и теоретического нормального закона. В этом случае разница между теоретическими и эмпирическими значениями функций распределения будет нулевой, и значения статистик λ_i окажутся меньше соответствующих значений границ критической области λ_α из табл. 5.13.

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Для всех рассмотренных статистик выполняется условие $\lambda_i \le \lambda_\alpha$, ($i$ = 1, 2, .., 4), поэтому нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Вывод. Эмпирическое распределение случайной величины Y с вероятностью не менее 95 % не противоречит нормальному закону распределения.

5.3. Проверка выборок на наличие инородных значений

5.3.1. Проверка выборки случайной величины *X*

Наиболее подозрительными на инородность являются опытные значения, располагающиеся на краях ранжированной выборки опытных значений. Для случайной величины X в табл. 5.3, в столбце ранжированных опытных значений $X_{\text{возр}}$ такими значениями являются 5,69 и 6,55. В исходной выборке они имеют номера $x_{27} = 5{,}69$ и $x_{22} = 6{,}55$.

Центр распределения опытных значений X характеризуется средним арифметическим $\bar{x} = 5{,}98$ (см. табл. 5.4). Для выделенных опытных значений отклонения от центра распределения составят

$$\Delta x_{27} = |x_{27} - \bar{x}| = |5{,}69 - 5{,}98| = 0{,}29,$$

$$\Delta x_{22} = |x_{22} - \bar{x}| = |6{,}55 - 5{,}98| = 0{,}57.$$

Отклонение от центра распределения больше для 22-го опытного значения X, поэтому именно его выберем для первой проверки.

Проверку проведем в соответствии с общим алгоритмом проверки статистических гипотез, рассмотренным для данного случая в п. 4.1.1.

Процедуру проверки сформулированной выше гипотезы относительно рассматриваемого подозрительного опытного значения x_i проведем в соответствии с общим алгоритмом, приведенным выше:

1. *Формулируется нулевая гипотеза* H_0: $x_{22} = 6{,}55 \in X$ — гипотеза о том, что значение x_{22} принадлежит генеральной совокупности опытных данных X, а значит, его следует оставить в выборке.

2. *Формулируется альтернативная гипотеза* H_1: $x_{22} \notin X$ — гипотеза о том, что значение x_{22} не принадлежит генеральной совокупности опытных данных X, является инородным и его следует исключить из выборки.

3. *Выбирается критерий для проверки* H_0. Для старой технологии известно значение генерального стандартного отклонения $\sigma = 0{,}19$ мм (см. исходные данные на с. 208), поэтому в качестве статистического критерия для проверки сформулированной гипотезы будем использовать t-критерий Груббса [12].

4. *Рассчитываем статистику, относящуюся к выбранному критерию*:

$$t = \left| \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right| = \left| \frac{6{,}55 - 5{,}98}{0{,}19} \right| = 3{,}00.$$

5. *Находим границы критической области и местоположение критической области*. Границу критической области определим по таблице критических значений используемого критерия из прил. 9 для заданного заранее уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и объема выборки $N = 30$: $t_{\alpha,N} = t_{0{,}05,\ 30} = 2{,}93$.

Из рассуждений, приведенных в п. 4.1.1, следует, что при принятых нулевой и альтернативной гипотезах критическая область является правосторонней, а область принятия нулевой гипотезы расположена слева от границы, как это показано на рис. 5.8.

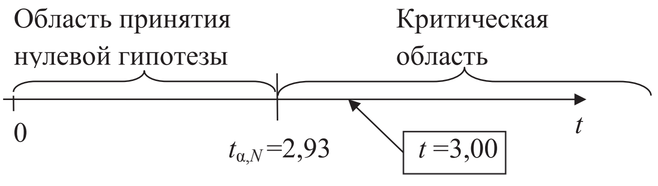


Рис. 5.8. Расположение областей при проверке гипотезы о наличии в выборке случайной величины X инородных значений

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Оказалось, что $t = 3{,}00 > t_{\alpha,N} = 2{,}93$, значение статистики t попадает в критическую область. Результат испытаний $x_{22} = 6{,}55$ следует признать инородным, его следует исключить их рассмотрения. В этом случае найденная ранее оценка математического ожидания $\bar{x}$ должна быть скорректирована.

После исключения $x_{22} = 6{,}55$ для оставшихся 29 опытных значений изменится среднее арифметическое. Новое значение среднего арифметического составит:

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x}N_x - x_{22}}{N_x'} = \frac{5{,}98 \cdot 30 - 6{,}55}{29} = 5{,}96.$$

После исключения опытного значения $x_{22} = 6{,}55$ в оставшейся части выборки из табл. 5.1 могут быть и другие инородные значения, поэтому среди оставшихся значений вновь выберем наиболее подозрительное x_i и вновь проведем его проверку. Алгоритм действий при проверке аналогичен вышерассмотренному, поэтому не будем приводить излишние комментарии расчетов.

Подозрительные значения: $x_{\min} = x_{27} = 5{,}69$ и $x_{\max} = x_{21} = 6{,}27$.

Отклонения от центра распределения (нового среднего арифметического $\bar{x} = 5{,}96$):

$$\Delta x_{27} = |x_{27} - \bar{x}| = |5{,}69 - 5{,}96| = 0{,}27,$$

$$\Delta x_{21} = |x_{21} - \bar{x}| = |6{,}27 - 5{,}96| = 0{,}31.$$

$\max(\Delta x_{27}, \Delta x_{21}) = 0{,}31 \Rightarrow$ Для первой проверки выберем 21-е значение $\Delta x_{21} = 6{,}27$.

Нулевая гипотеза H_0: $x_{21} = 6{,}27 \in X$.

Альтернативная гипотеза H_1: $x_{21} \notin X$.

Критерий для проверки H_0 — t-критерий Груббса [12].

Статистика

$$t = \left|\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right| = \left|\frac{6{,}27 - 5{,}96}{0{,}19}\right| = 1{,}63.$$

Граница критической области

В прил. 9 значения для $N = 29$ и $\alpha = 0{,}05$, т. е. $t_{\alpha,N} = t_{0{,}05,\ 29} = 2{,}93$, нет.

Рассчитаем его, используя метод линейной интерполяции и два соседних значения для N_1=25 и N_1=30:

$$t_{\alpha,N} = t_{0{,}05,\ 29} = t_{\alpha,N_1} + \frac{t_{\alpha,N_2} - t_{\alpha,N_1}}{N_2 - N_1}(N - N_1).$$

Из прил. 9 $t_{\alpha,N_1} = t_{0{,}05,\ 25} = 2{,}82$ и $t_{\alpha,N_2} = t_{0{,}05,\ 30} = 2{,}93$, тогда

$$t_{\alpha,N} = t_{0{,}05,\ 29} = 2{,}82 + \frac{2{,}93 - 2{,}82}{30 - 25} \cdot (29 - 25) = 2{,}91.$$

Критическая область правосторонняя.

Вывод. $t = 1{,}63 < t_{\alpha,N} = 2{,}91$, значение статистики t попадает в область принятия нулевой гипотезы. Результат испытаний $x_{21} = 6{,}27$ нельзя признать инородным, его следует использовать при дальнейшем статистическом анализе. Больше в выборке случайной величины X (диаметр катанки, произведенной по старой технологии) инородных значений нет, выборка цензурирована.

После исключения $x_{22} = 6{,}55$ для оставшихся 29 опытных значений, кроме изменения среднего арифметического, изменятся и другие точечные оценки.

Новое значение выборочной дисперсии рассчитаем по использованному в подглаве 5.1 выражению $s_x^2 = \frac{1}{N_x - 1}\left[\sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 - \frac{1}{N_x}\left(\sum_{i=1}^{N_x} x_i\right)^2\right]$, подставив значения сумм для N=29 оставшихся опытных значений:

$$\sum_{i=1}^{29} x_i^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - x_{22}^2 = 1075{,}0162 - 6{,}55^2 = 1032{,}1137,$$

$$\sum_{i=1}^{29} x_i = \sum_{i=1}^{30} x_i - x_{22} = 179{,}50 - 6{,}55 = 172{,}95.$$

$$s_x^2 = \frac{1}{29-1}\left[1032{,}1137 - \frac{1}{29}(172{,}95)^2\right] = 0{,}0241 \text{ мм}^2.$$

Новое значение выборочного стандартного отклонения

$$s_x = +\sqrt{s_x^2} = \sqrt{0{,}0241} = 0{,}16 \text{ мм}.$$

5.3.2. Проверка выборки случайной величины *Y*

Проверку выборки случайной величины Y проведем в соответствии с общим алгоритмом проверки статистических гипотез, рассмотренным для данного случая в п. 4.1.2. Последовательность проверки и все выполняемые расчеты будут близки к рассмотренным в п. 5.3.1 для случайной величины X, поэтому исключим очевидные комментарии, одинаковые для этих двух случаев.

Подозрительные значения: $y_{\min} = y_7 = 5{,}27$ и $y_{\max} = y_{29} = 5{,}73$.

Отклонения от центра распределения (среднее арифметическое из табл. 5.4 $\bar{y} = 5{,}47\bar{y} = 5{,}47$):

$$\Delta y_7 = |y_7 - \bar{y}| = |5{,}27 - 5{,}47| = 0{,}20,$$

$$\Delta y_{29} = |y_{29} - \bar{y}| = |5{,}73 - 5{,}47| = 0{,}26,$$

$\max(\Delta y_7, \Delta y_{29}) = 0{,}26 \Rightarrow$ Для первой проверки выберем 29-е значение $y_{29} = 5{,}73$.

Нулевая гипотеза H_0: $y_{29} = 5{,}73 \in Y$ — гипотеза о том, что значение y_{29} принадлежит генеральной совокупности опытных данных Y, не является инородным, его следует оставить в выборке.

Альтернативная гипотеза H_1: $y_{29} \notin Y$ — гипотеза о том, что значение y_{29} не принадлежит генеральной совокупности опытных данных Y, является инородным, подлежит выбрасыванию из выборки.

Критерий для проверки H_0. Для случайной величины Y генеральное стандартное отклонение σ_y не известно (как и генеральная дисперсия σ_y), поэтому, следуя рекомендациям [12, 15, 16], будем использовать U-критерий Н. В. Смирнова.

Статистика критерия Смирнова для данного случая близка к использованной выше статистике Груббса и отличается лишь использованием в знаменателе вместо генерального стандартного отклонения σ_y выборочного стандартного отклонения $s_y = 0{,}12$ (см. табл. 5.4):

$$U = \left|\frac{y_i - \bar{y}}{s}\right| = \left|\frac{5{,}73 - 5{,}47}{0{,}12}\right| = 2{,}17.$$

Граница критической области. В прил. 9 для $N = 30$ и $\alpha = 0{,}05$ значения $U_{\alpha,N}$ нет, но в соответствии с рекомендациям [12, 15, 16] вместо него можно использовать значение $t_{\alpha,N}$, определенное для тех же N и α в соседних столбцах той же таблицы, т. е. принять $U_{\alpha,N} = U_{0{,}05,\ 30} = t_{\alpha,N} = t_{0{,}05,\ 30} = 2{,}93$.

Учитывая схожесть статистик U и t, подчиненность и случайной величины X, и случайной величины Y нормальному закону распределения, а также однотипность приятых нулевой и альтернативной гипотез, критическая область для U-критерия так же, как и для t-критерия, будет правосторонней (см. рис. 5.5).

Вывод. Оказалось, что $U = 2{,}17 < U_{\alpha,N} = 2{,}93$ $U = 2{,}17 < U_{\alpha,N} = 2{,}93$. Это означает, что U-статистика попадает в область принятия нулевой гипотезы. Результат испытаний $y_{29} = 5{,}73$ нельзя признать инородным, его следует использовать при дальнейшем статистическом анализе.

Больше в выборке случайной величины Y (диаметр катанки, произведенной по новой технологии) инородных значений нет, выборка цензурирована.

Для удобства дальнейшего использования сведем оценки числовых характеристик случайных величин X и Y, полученные после цензурирования выборок, в единую табл. 5.14.

Таблица 5.14

Характеристики случайных величин *X* и *Y* после цензурирования выборок

Случайная величина	Объем выборки N	Генеральное стандартное отклонение σ	Среднее арифметическое	Выборочная дисперсия s^2	Выборочное стандартное отклонение s
X (старая технология)	29	0,19	5,98	0,0241	0,16
Y (новая технология)	30	Не известно	5,47	0,0142	0,12

Из выборки случайной величины X одно опытное значение отброшено. Отбрасывание данных, несомненно, влияет на характер распределения оставшихся опытных данных. Для проведения дальнейшего анализа имеет смысл убедиться в том, что выборка продолжает подчиняться нормальному закону распределения. Используем для этой цели один из специализированных критериев согласия — критерий Шапиро — Уилка, имеющий в соответствии с табл. 4.2 наивысший ранг.

5.3.3. Проверка сохранения нормальности выборки случайной величины *X* после ее цензурированния

Проверка проводится в соответствии с общим алгоритмом проверки статистических гипотез применительно к критерию согласия Шапиро — Уилка (W-критерию согласия) в п. 4.4.3.

Используется ранжированная выборка (см. табл. 5.3) в столбце $X_{возр}$, но последнее (30-е) опытное значение 6,55 не удовлетворяет критериям п. 5.3.1, поэтому использовать его не будем:

1. *Формулируется нулевая гипотеза* H_0: $F^{Э}(x) = N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не противоречит теоретическому нормальному закону распределения $N(\mu,\sigma)$ с параметрами μ и σ, оцененными при помощи среднего арифметического $\bar{x}$ и несмещенной выборочной дисперсии s^2 соответственно по табл. 5.14.

2. *Формулируется альтернативная гипотеза* H_1: $F^{Э}(x) \neq N(\mu,\sigma)$ — гипотеза о том, что эмпирическое распределение $F^{Э}(x)$ не соответствует теоретическому нормальному закону распределения $N(\mu,\sigma)$.

3. *Выбирается критерий для проверки* H_0. Используем критерий согласия Шапиро — Уилка, когда рассматриваем сложную гипотезу (что означает отказ от использования известного значения стандартного отклонения, т. к. в явном виде в статистике W эта величина не используется).

4. *Рассчитывается статистика, относящаяся к выбранному критерию*. Статистикой критерия согласия Шапиро — Уилка является величина

$$W = \frac{b^2}{S^2},$$

для расчета которой необходимо предварительно определить входящие в состав выражения (4.25) величины S^2 (4.26) и b^2 (4.27), определяемые соответственно по формулам

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2,$$

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{N-i+1}(x_{N-i+1} - x_i),$$

где значения коэффициентов a_{N-i+1} для $i = 1, 2, ..., k$ выбираются из прил. 11.

Объем выборки N_x является нечетным, поэтому $k = \frac{N-1}{2} = \frac{29-1}{2} = 14$.

Величину S^2 можно рассчитать, используя приведенное выше выражение. Но можно заметить, что оно отличается от общего выражения для расчета выборочной дисперсии (см. п. 5.1.2) $S^2 = \frac{1}{N_x - 1}\left[\sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 - \frac{1}{N_x}\left(\sum_{i=1}^{N_x} x_i\right)^2\right]$ наличием знаменателя $N_x - 1$. Поэтому рассчитаем S^2 так:

$$S^2 = s_x^2 \cdot (N_x - 1) = 0{,}0241 \cdot (29 - 1) = 0{,}6757,$$

где значение $s_x^2 = 0{,}0241$ взято из табл. 5.14.

Для расчета величины b^2 по формуле (4.26) формируется показанная ниже табл. 5.15, куда помещаются опытные значения x_{N-i+1} из табл. 5.3, и коэффициенты a_{N-i+1}, выбранные из прил. 11 при $N = 29$ для $i = 1, 2,.., 14$.

Таблица 5.15

Данные для расчета статистики *W* критерия Шапиро — Уилка

I	$N-i+1$	x_i	x_{N-i+1}	a_{N-i+1}	$x_{N-i+1} - x_i$	$a_{N-i+1}(x_{N-i+1} - x_i)$
1	29	5,69	6,27	0,4328	0,58	0,2510
2	28	5,71	6,22	0,2992	0,51	0,1526
3	27	5,72	6,19	0,2510	0,47	0,1180
4	26	5,73	6,16	0,2151	0,43	0,0925
5	25	5,77	6,12	0,1857	0,35	0,0650
6	24	5,83	6,09	0,1601	0,26	0,0416
7	23	5,86	6,07	0,3720	0,21	0,0781
8	22	5,86	6,06	0,1162	0,20	0,0232
9	21	5,86	6,05	0,0965	0,19	0,0183
10	20	5,91	6,04	0,0778	0,13	0,0101
11	19	5,93	6,01	0,0598	0,08	0,0048
12	18	5,93	6,00	0,0424	0,07	0,0030
13	17	5,95	6,00	0,0253	0,05	0,0013
14	16	5,95	5,99	0,0084	0,04	0,0003
Σ						0,8599

В последней строке табл. 5.15 (обозначена знаком Σ) рассчитано значение $b = \sum_{i=1}^{14} a_{29-i+1}\left(x_{29-i+1} - x_i\right) = 0{,}8599.$

Поэтому $b^2 = 0{,}8599^2 = 0{,}7394.$

Окончательно получим

$$W = \frac{b^2}{S^2} = \frac{0{,}7394}{0{,}6757} = 1{,}0942.$$

5. *Граница критической области* $W_{\alpha,N} = W_{0{,}05,\ 29} = 0{,}926$ определяется по таблице критических значений критерия Шапиро — Уилка, приведенной в прил. 12 в зависимости от принятого уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и объема выборки $N = 29$.

Граница критической области $W_{\alpha,N}$ является левосторонней границей [12, 15], поэтому область принятия нулевой гипотезы располагается справа от нее.

Вывод. Условие $W = 1,094 \geq W_{\alpha,N} = 0,926$ выполнено, поэтому следует принять нулевую гипотезу о соответствии эмпирического закона распределения анализируемой случайной величины X нормальному закону распределения при вероятности ошибки не более 5%.

5.4. Интервальные оценки основных генеральных числовых характеристик

5.4.1. Случайная величина *X*

Интервальная оценка математического ожидания

Для старой технологии (случайная величина X) генеральная дисперсия известна, поэтому при построении двустороннего доверительного интервала для математического ожидания μ_x используется выражение (3.12) из п. 3.4.1:

$$\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu_x \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Значения квантилей $u_{1-\alpha/2} = u_{1-\frac{0,05}{2}} = u_{0,975} = 1,960$ для доверительной вероятности $p = 0,975$ выбираются из прил. 5. Значения среднего арифметического $\bar{x} = 5,98$ и генерального стандартного отклонения $\sigma = 0,19$ выбираются из табл. 5.14. Получим

$$5,98 - 1,96 \frac{0,19}{\sqrt{29}} < \mu_x \leq 5,98 + 1,96 \frac{0,19}{\sqrt{29}},$$

$$5,91 < \mu_x \leq 6,05 \text{ мм}.$$

Строить интервальную оценку для генеральной дисперсии и генерального стандартного отклонения случайной величины X (для старой технологии) не имеет смысла, т. к. известно точное численное значение генерального стандартного отклонения $\sigma = 0,19$, а следовательно, можно рассчитать точное значение генеральной дисперсии $\sigma^2 = 0{,}0361$. Использовать в этом случае какие-либо оценки, т. е. приближенные значения, не логично.

5.4.2. Случайная величина *Y*

Интервальная оценка математического ожидания

Для новой технологии (случайная величина *Y*) генеральная дисперсия неизвестна, поэтому для построения двустороннего доверительного интервала для математического ожидания μ_y используется выражение (3.14) из п. 3.4.2 (при смене *x* на *y*):

$$\bar{y} - t_{\alpha/2,\nu}\frac{s_y}{\sqrt{N_y}} < \mu_y \le \bar{y} + t_{\alpha/2,\nu}\frac{s_y}{\sqrt{N_y}},$$

где квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha/2,\nu}$ для уровня значимости $\alpha/2 = 0{,}025$ и числа степеней свободы $\nu = N_y - 1 = 30 - 1 = 29$ выбирается по данным прил. 7: $t_{\alpha/2,\nu} = t_{0{,}025,\ 29} = 2{,}364$. Значения среднего арифметического $\bar{y} = 5{,}47$ и выборочного стандартного отклонения $s_y = 0{,}12$ выберем из табл. 5.14. Получим

$$5{,}47 - 2{,}364\frac{0{,}12}{\sqrt{29}} < \mu_y \le 5{,}47 + 2{,}364\frac{0{,}12}{\sqrt{29}},$$

$$5{,}45 < \mu_y \le 5{,}49 \text{ мм.}$$

Интервальная оценка генеральной дисперсии

При построении двустороннего доверительного интервала для генеральной дисперсии σ_y^2 используется выражение (3.20) из п. 3.4.3

$$s_y^2\frac{(N_y - 1)}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}} < \sigma_y^2 \le s_y^2\frac{(N_y - 1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}},$$

где квантили распределения Пирсона $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$ для уровней значимости $\alpha/2 = 0{,}025$, $1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и числа степеней свободы

$\nu = N_y - 1 = 30 - 1 = 29$ выберем по данным прил. 6: $\chi^2_{\alpha/2,\nu} = \chi^2_{0,025,\ 29} = 45,72$ и $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu} = \chi^2_{0,975,\ 29} = 16,05$. Значения выборочной дисперсии $s_y^2 = 0,0142$ выберем из табл. 5.14. Получим

$$0,0142\frac{(30-1)}{45,72} < \sigma_y^2 \le 0,0142\frac{(30-1)}{16,05},$$

$$0,0090 < \sigma_y^2 \le 0,0224 \text{ мм}^2.$$

Интервальная оценка генерального стандартного отклонения

Построение доверительного интервала для генерального стандартного отклонения нормально распределенной случайной величины X проводят путем извлечения корня квадратного из соответствующих границ интервальной оценки для генеральной дисперсии:

$$\sqrt{s_y^2\frac{\left(N_y - 1\right)}{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}} < \sigma_y \le \sqrt{s_y^2\frac{\left(N_y - 1\right)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}}},$$

$$\sqrt{0,0090} < \sigma_y \le \sqrt{0,0224},$$

$$0,09 < \sigma_y \le 0,15 \text{ мм}.$$

5.5. Расчет необходимого числа измерений для построения интервальной оценки с заданной точностью

Расчет необходимого количества измерений проведем для случайной величины Y (диаметр катанки, произведенной по новой технологии).

5.5.1. Необходимое число измерений для оценивания математического ожидания диаметра катанки с точностью 0,01 мм

Под точностью 0,01 мм понимают отклонение диаметра от номинального значения на 0,01 мм как в сторону положительных, так и в сторону отрицательных значений. Ширина доверительного интервала при такой оценке составит $L = 2 \cdot 0,01 = 0,02$ мм.

Расчет генерального стандартного отклонения для старой технологии

Известно генеральное стандартно отклонение σ, поэтому для расчета необходимого количества измерений можно воспользоваться выражением (3.24), полученным в п. 3.5.1:

$$N = \left(2u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{L}\right)^2,$$

где $\sigma = 0{,}19$ мм — известное для старой технологии генеральное стандартное отклонение; $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартизованного нормального закона распределения, значение которого можно определить по прил. 5 в зависимости от заданной доверительной вероятности $P = 1 - \alpha / 2 = 1 - 0{,}05 / 2 = 0{,}975$. По таблице $u_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$. Значение $L = 0{,}02$ определено выше.

Подставив эти значения в формулу (3.24), получаем

$$N = \left(2 \cdot 1{,}96\frac{0{,}19}{0{,}02}\right)^2 = 1386{,}8 \approx 1387 \text{ измерений.}$$

Для сравнения, при построении интервальной оценки математического ожидания на с. 235, для $N = 29$ измерений получено $5{,}91 < \mu_x \le 6{,}05$ мм. Ширина интервальной оценки μ_x составляет $L' = 6{,}05 - 5{,}91 = 0{,}14$ мм (т. е. $\pm$ 0,07 мм).

По сравнению с требуемой ширина полученной ранее оценки в 0,07/0,01 = 7 раз больше, а для получения новой, более точной оценки потребуется в 1378/29 ≈ 48 раз большее количество измерений.

Расчет генерального стандартного отклонения для новой технологии

Генеральное стандартное отклонение диаметра катанки для новой технологии неизвестно, поэтому для расчета необходимого количества измерений воспользуемся выражением (3.25), полученным в п. 3.5.2:

$$N = \left(2t_{\alpha,\nu}\frac{s}{L}\right)^2.$$

В это выражение (3.25) искомое значение N входит как в левую часть равенства, так и в правую. Его аналитическое решение относительно N или невозможно, или сопряжено со значительными математическими затруднениями в связи со сложным видом уравнения функции распределения Стьюдента (см. п. 2.4.2, выражение (2.26)). Наиболее просто решение относительно N может быть получено численным методом в соответствии со следующей процедурой:

- принимаем некоторое исходное значение объема выборки N;
- определяем по таблице квантилей распределения Стьюдента (прил. 7) значение квантиля $t_{\alpha,N-1}$;
- по выражению (3.25) рассчитываем объем выборки N';
- если N и N' совпали (или возникает циклическое повторение результатов расчета), то расчет заканчиваем; если нет, то принимаем $N = N'$ и повторяем процедуру расчета начиная с п. 2.

Предварительно выражение для N имеет смысл максимально упростить, подставив все известные и неизменные числовые значения ($s = 0{,}12$ — по табл. 5.3, $L = 0{,}02$ — см. п. 5.5.1):

$$N = \left(2t_{\alpha,\nu}\frac{s}{L}\right)^2 = \left(2t_{\alpha,\nu}\frac{0{,}12}{0{,}02}\right)^2 = 144\left(t_{\alpha,\nu}\right)^2.$$

Довольно удобно такую процедуру реализовать в табличном виде, например в виде табл. 5.16, которая, в частности, может быть реализована в Excel.

Таблица 5.16

Необходимое число измерений для построения двусторонней интервальной оценки математического ожидания с заданной точностью

N	$t_{0,05,\,,N-1}$	$144t_{0,05,\,,N-1}$
30	2,045	602,35
602	1,964	555,4
555	1,964	555,6
556	1,964	555,6

5.5.2. Необходимое число измерений для оценивания стандартного отклонения диаметра катанки с точностью 0,1 мм

Под точностью 0,1 понимают относительную точность оценки $\varepsilon_\sigma = \dfrac{L}{s} = 0{,}1$, т. е. ширина доверительного интервала L должна составлять 10 % от величины выборочного стандартного отклонения s.

Для старой технологии известно генеральное значение стандартного отклонения σ, поэтому нахождение любых оценок не имеет смысла, а значит, и расчет необходимого количества измерений N для построения такой оценки также практически бесполезен. Поэтому проводить расчет будем только для новой технологии (случайная величина Y).

В п. 3.5.4 получено уравнение (3.28), принципиально позволяющее произвести расчет необходимого числа измерений N:

$$N = \frac{L^2}{s^2}\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}\chi^2_{\alpha/2,\nu}}{\left(\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}} - \sqrt{\chi^2_{\alpha/2,\nu}}\right)^2} + 1.$$

В уравнение (3.28) неизвестная величина N входит в явном виде в левую часть и в неявном виде ($\nu = N - 1$) в правую. В связи с трудностями математических преобразований решение уравнения (3.28) наиболее просто может быть получено численным методом (методом целенаправленного подбора), с использованием последовательности численного расчета, описанной в п. 3.5.3.

Подставим в выражение (3.28) значения, которые будут постоянными в расчете:

$$N = 0{,}01\frac{\chi^2_{0{,}975,\ (N-1)}\chi^2_{0{,}025,\ (N-1)}}{\left(\sqrt{\chi^2_{0{,}975,\ (N-1)}} - \sqrt{\chi^2_{0{,}025,\ (N-1)}}\right)^2} + 1.$$

Результаты расчета представлены в табл. 5.17.

Таблица 5.17

Необходимое число измерений для построения интервальной оценки генерального стандартного отклонения с заданной точностью

N	$\chi^2_{0{,}025,\ (N-1)}$	$\chi^2_{0{,}975,\ (N-1)}$	N'
50	70,222	31,555	3,9
100	128,422	73,361	13,3
300	348,794	252,992	116,0
500	562,789	438,998	322,8
700	774,158	627,630	633,7
900	983,986	817,802	1048,8
800	879,226	722,562	828,2
750	826,735	675,053	727,7
770	847,741	694,047	767,1
780	858,239	703,549	787,2

Окончание табл. 5.17

N	$\chi^2_{0{,}025,\ (N-1)}$	$\chi^2_{0{,}975,\ (N-1)}$	N'
775	852,991	698,797	777,2
774	851,941	697,847	775,2
773	850,891	696,897	773,1

Вывод. Для того чтобы оценить математическое ожидание диаметра катанки с точностью 0,01 мм, необходимо произвести 1387 измерений для старой технологии и 556 измерений для новой. Для нахождения оценки стандартного отклонения диаметра катанки, произведенной по новой технологии с точностью 0,1 (10 %), необходимо произвести 773 измерения.

5.6. Расчет вероятности попадания диаметра катанки в поле допуска по ГОСТу

В подглавах 5.2 и 5.3 установлено, что рассматриваемые случайные величины диаметра катанки X (произведенной по старой технологии) и Y (произведенной по новой технологии) подчиняются нормальному закону распределения с разными параметрами распределения, оценки которых приведены в табл. 5.14. Это дает основание для расчета искомых вероятностей попадания значений этих случайных величин в поле допуска использовать стандартизованный нормальный закон распределения.

5.6.1. Расчет вероятности попадания диаметра катанки в поле допуска случайной величины *X* (старая технология)

По ГОСТ 2590–2006 для класса точности В допуск на катанку с номинальным диаметром 6 мм составляет $^{+0,3}_{-0,5}$ мм. Диапазоном возможных изменений диаметра катанки является $x^{\text{Лев}} = 5{,}5$ и $x^{\text{Пр}} = 6{,}3$ мм.

Проведем нормирование границ интервала поля допуска, используя выражение (2.17) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ и оценки из табл. 5.14:

$$U_x^{\text{Лев}} = \frac{x^{\text{Лев}} - \bar{x}}{s_x} = \frac{5{,}50 - 5{,}98}{0{,}16} = -3{,}00,\ U_x^{\text{Пр}} = \frac{x^{\text{Пр}} - \bar{x}}{s_x} = \frac{6{,}30 - 5{,}98}{0{,}16} = 2{,}00.$$

Для определения вероятности попадания диаметра катанки в поле допусков воспользуемся функцией стандартного нормального закона распределения (прил. 1):

$$P(5{,}5 < X \le 6{,}3) = P(-3{,}00 < U_x \le 2{,}00) = \Phi(2{,}00) - \Phi(-3{,}00) =$$
$$= \Phi(2{,}00) - (1 - \Phi(3{,}00)) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}9987) = 0{,}9759.$$

Рассчитаем вероятность попадания диаметра той же катанки в поле допуска для класса точности Б $^{+0,1}_{-0,5}$. Для такого поля допуска границами возможных значений диаметра будут являться $x^{\text{Лев}} = 5{,}5$ и $x^{\text{Пр}} = 6{,}1$ мм.

Нормированные границы

$$U_x^{\text{Лев}} = \frac{x^{\text{Лев}} - \bar{x}}{s_x} = \frac{5{,}5 - 5{,}98}{0{,}16} = -3{,}00,\ U_x^{\text{Пр}} = \frac{x^{\text{Пр}} - \bar{x}}{s_x} = \frac{6{,}1 - 5{,}98}{0{,}16} = 0{,}75.$$

Вероятность попадания диаметра катанки в эти границы:

$$P(5{,}5 < X \le 6{,}1) = P(-3{,}00 < U_x \le 0{,}75) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-3{,}00) =$$
$$= \Phi(0{,}75) - (1 - \Phi(3{,}00)) = 0{,}7734 - (1 - 0{,}9987) = 0{,}7721.$$

Таким образом, вероятность попадания диаметра катанки, производимой по старой технологии, в поле допуска по ГОСТу для класса точности В составляет 97,59 %, что вполне приемлемо, а для класса точности Б — 77,21 %, что, конечно же, недопустимо. Отсюда вывод: возможности старого стана исчерпываются производством катанки только обычной точности (класс В), статистических оснований для перехода на выпуск катанки повышенной точности (класс Б) нет.

5.6.2. Расчет вероятности попадания диаметра катанки в поле допуска случайной величины *Y* (новая технология)

Сначала рассчитаем вероятность попадания диаметра катанки в поле допуска для номинального диаметра 6 мм и для класса точности В $^{+0,3}_{-0,5}$ мм. Диапазон возможных изменений диаметра $y^{\text{Лев}} = 5{,}5$ мм и $y^{\text{Пр}} = 6{,}3$ мм.

Нормированные границы

$$U_y^{\text{Лев}} = \frac{y^{\text{Лев}} - \bar{y}}{s_y} = \frac{5{,}50 - 5{,}47}{0{,}12} = 0{,}25,\ U_y^{\text{Пр}} = \frac{y^{\text{Пр}} - \bar{y}}{s_y} = \frac{6{,}30 - 5{,}47}{0{,}12} = 6{,}38.$$

Вероятность попадания диаметра катанки в эти границы:

$$P(5{,}5 < Y \le 6{,}3) = P(0{,}27 < U_x \le 6{,}38) =$$
$$= \Phi(6{,}38) - \Phi(0{,}27) = 1 - 0{,}6064 = 0{,}3936.$$

Получили очень маленькую вероятность, что связано со стремлением прокатать на новом стане катанку с меньшим диаметром, который в среднем составляет $\bar{y} = 5{,}47$ мм. По ГОСТ 2590–2006 меньшим номинальным диаметром по сравнению с 6,0 мм является диаметр 5,5 мм, для которого распределение полей допусков по классам точности такое же, как и для номинала 6,0.

Рассчитаем вероятность попадания диаметра катанки с номиналом 5,5 мм в поле допуска обычной точности В $^{+0,3}_{-0,5}$ мм.

Диапазон возможных изменений диаметра $y^{\text{Лев}} = 5{,}0$ и $y^{\text{Пр}} = 5{,}8$ мм.

Нормированные границы

$$U_y^{\text{Лев}} = \frac{y^{\text{Лев}} - \bar{y}}{s_y} = \frac{5{,}00 - 5{,}47}{0{,}12} = -3{,}92,\ U_y^{\text{Пр}} = \frac{y^{\text{Пр}} - \bar{y}}{s_y} = \frac{5{,}80 - 5{,}47}{0{,}12} = 2{,}75.$$

Вероятность попадания диаметра катанки в допуск обычной точности:

$$P(5{,}0 < X \le 5{,}8) = P(-3{,}92 < U_x \le 2{,}75) = \Phi(2{,}75) - \Phi(-3{,}92) =$$
$$= \Phi(2{,}75) - (1 - \Phi(3{,}92)) = 0{,}9970 - (1 - 1) = 0{,}9970.$$

Для номинала 5,5 мм поле допуска повышенной точности Б составляет $^{+0,1}_{-0,5}$ мм. Границы возможного изменения диаметра $y^{\text{Лев}} = 5{,}0$ мм и $y^{\text{Пр}} = 5{,}6$ мм, нормированные границы $U_y^{\text{Лев}} = -3{,}92$, $U_y^{\text{Пр}} = \frac{y^{\text{Пр}} - \bar{y}}{s_y} = \frac{5{,}6 - 5{,}47}{0{,}12} = 1{,}08.$

Вероятность попадания диаметра катанки в допуск повышенной точности:

$$P(5{,}0 < X \le 5{,}6) = P(-3{,}92 < U_x \le 1{,}08) = \Phi(1{,}08) - \Phi(-3{,}92) =$$
$$= \Phi(1{,}08) - (1 - \Phi(3{,}92)) = 0{,}8599 - (1 - 1) = 0{,}8599.$$

Таким образом, вероятность попадания диаметра катанки, производимой по новой технологии, с номиналом 5,5 мм в поле допуска для класса обычной точности В составляет 99,7 %, что дает основания для высокой уверенности в возможностях производить катанку с этим классом точности. Для класса повышенной точности Б вероятность попадания в поле допуска существенно ниже — примерно 86 %. Это вызывает большие сомнения в целесообразности перехода на производство такой продукции в существующих условиях. Требуется проведение каких-то корректирующих мероприятий. Можно высказать предположение, что для перехода на выпуск высокоточной катанки достаточно уменьшить среднее значение ее диаметра. Подтверждение такого предположения попытаемся получить в процессе последующего статистического анализа.

5.7. Расчет значения, которое не будет превышено с заданной вероятностью

Учитывая заданное в исходных данных значение уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, в качестве вероятности, с которой не должно быть превышено искомое значение диаметра катанки, будем использовать вероятность $p = 1 - \alpha = 0{,}95$.

Значение случайной величины, которое не будет превышено с заданной вероятностью p, является, по определению, квантилем этой случайной величины порядка p. Как установлено выше, обе рассматриваемые случайные величины X и Y (диаметры катанки, произведенной по старой и новой технологиям) подчиняются нормальному закону распределения, поэтому для расчета квантилей этих случайных величин можно использовать операцию нормирования (2.17) и стандартизованный нормальный закон распределения.

Если в операции нормирования (2.17) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ под величиной U понимать квантиль U_p порядка p, то и нормируемая случайная величина X будет квантилем X_p того же порядка p:

$$U_p = \frac{X_p - \mu}{\sigma}. \tag{5.5}$$

Значение квантиля U_p можно определить по таблице квантилей стандартного нормального распределения, помещенной в прил. 5 (или одним из альтернативных способов, подробно описанных в подглаве 2.5, в зависимости от имеющихся опытных данных). При известных или оцененных параметрах распределения случайной величины X μ и σ для расчета квантиля X_p достаточно выразить это значение из уравнения (5.5):

$$x_p = \mu + u_p \sigma. \tag{5.6}$$

Для рассматриваемых случайных величин X и Y значение квантиля u_p стандартизованного нормального закона распределения одинакового порядка $p = 0{,}95$ будет одинаковым и составит $u_p = u_{0,95} = 1{,}645$ (прил. 5). Используя это значение и подставив в выражение (5.6) необходимые числовые значения из табл. 5.14, получим:

- для катанки, произведенной по старой технологии, с вероятностью 95 % не будет превышен диаметр

$$x_{0,95} = \bar{x} + u_{0,95}\sigma_x = 5{,}98 + 1{,}645 \cdot 0{,}19 = 6{,}29 \text{ мм};$$

- для катанки, произведенной по новой технологии, с вероятностью 95 % не будет превышен диаметр

$$y_{0,95} = \bar{y} + u_{0,95} \cdot s_x = 5{,}47 + 1{,}645 \cdot 0{,}12 = 5{,}67 \text{ мм}.$$

5.8. Определение влияния установки ЧБК на точность прокатки

Ответ на вопрос об увеличении точности прокатки после установки чистового блока клетей можно получить, сравнивая между собой дисперсии диаметра катанки, произведенной с использованием различных технологий как меры разброса опытных значений.

Для старой технологии генеральная дисперсия σ_x^2 считается известной, т. к. может быть однозначно рассчитана исходя из известного генерального стандартного отклонения σ_x: $\sigma_x^2 = \left(\sigma_x\right)^2 = 0{,}19^2 = 0{,}0361$. Для новой технологии генеральная дисперсия σ_y^2 не известна, но оценена при помощи выборочной дисперсии $s_y^2 = 0{,}0142$ (см. табл. 5.3).

Для имеющихся данных точность прокатки после установки ЧБК следует считать увеличенной, если удастся доказать, что выборочная дисперсия s_y^2 для новой технологии статистически значимо отличается в меньшую сторону от генеральной дисперсии σ_x^2 для старой технологии. Если же окажется, что такого отличия нет, то говорить о повышении точности прокатки нельзя. Такая постановка задачи эквивалентна проверке гипотезы о равенстве генеральных дисперсий диаметра для старой $\left(\sigma_x^2\right)$ и новой $\left(\sigma_y^2\right)$ технологий.

Проверку этой гипотезы проведем с использованием общего алгоритма, приведенного для рассматриваемого случая в п. 4.2.1:

1. *Формулируется нулевая гипотеза* H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ — гипотеза о том, что значения генеральных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 случайных величин X и Y равны, а значит, повышения точности прокатки при установке ЧБК не произошло.

2. *Формулируется альтернативная гипотеза.* В качестве альтернативной гипотезы (учитывая цели модернизации производства) следует использовать гипотезу о том, что дисперсия диаметра катанки, полученной по старой технологии (X), больше дисперсии диаметра катанки, полученной по новой технологии (Y): H_1: $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$.

3. *Выбирается критерий для проверки* H_0. Для случая нормального закона распределения случайной величины X проверка нулевой гипотезы о равенстве известной и неизвестной генеральных дисперсий проводится с использованием χ^2-критерия (критерия Пирсона) [12, 14–19].

4. *Рассчитывается статистика, относящаяся к выбранному критерию*. Используем выражение (4.3):

$$\chi^2 = \frac{s_y^2}{\sigma_x^2} \cdot (N-1) = \frac{0,0142}{0,0361} \cdot (29-1) = 11,01.$$

5. *Находим границы и местоположение критической области*. При выбранной альтернативной гипотезе $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$ смещение статистики χ^2 (4.3) от центра распределения $\nu = N-1$ происходит влево, в сторону меньших значений. Поэтому необходимо использовать левостороннюю критическую область. Границей критической области является (левосторонний) квантиль распределения Пирсона $\chi^2_{1-\alpha,\nu}$, значение которого можно определить по прил. 6 при заданном в условиях зада-

чи уровне значимости $1-\alpha=1-0,05=0,95$ и числе степеней свободы $\nu=N-1=29-1=28$: $\chi^2_{1-\alpha,\nu}=\varphi^2_{0,95,\ 28}=16,93$.

Область принятия нулевой гипотезы находится справа от этой границы, как это показано на рис. 4.6.

Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы. Справедливо неравенство $\chi^2=11,01<\chi^2_{1-\alpha,\nu}=16,93$, значит, статистика χ^2 попадает в критическую область, поэтому нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсии σ^2_x и σ^2_y следует отвергнуть. Таким образом, доказано, что выборочная дисперсия s^2_y для диаметра катанки, произведенной по новой технологии, статистически значимо меньше генеральной дисперсии σ^2_y, характерной для старой технологии. А это, в свою очередь, означает, что установка чистового блока клетей привела к повышению точности прокатки.

5.9. Возможность прокатки катанки меньшего диаметра после установки ЧБК

Проведенные выше расчеты указывают на то, что после установки чистового блока клетей появилась возможность производить катанку меньшего диаметра. Это экономически весьма целесообразно в связи с тем, что значительное количество катанки используется в дальнейшем в качестве заготовки для производства проволоки методом холодного волочения. А при холодных процессах ОМД даже небольшое повышение степени деформации сопряжено с довольно большим комплексом проблем, решение которых требует значительных затрат. Однако все расчеты, указывающие на возможность снижения диаметра, базировались на использовании достаточно ограниченного объема информации — двух выборках объемами по 30 случайных измерений диаметра. Малый объем информации и ее случайный характер обусловливают то, что проведенные выше расчеты, основанные исключительно на использовании статистик, следует рассматривать как предварительные, сопряженные с довольно высоким уровнем вероятности ошибки.

Статистически строгий, максимально объективный и с малой вероятностью ошибки ответ на вопрос о возможности получения проволоки меньшего диаметра может быть получен при использовании генеральных характеристик рассматриваемых случайных величин. В качестве генеральной величины, характеризующей средний диаметр катанки в генеральной совокупности результатов измерений, можно использовать математическое ожидания диаметра. Поэтому возникает задача сравнения двух математических ожиданий, описывающих разные генеральные совокупности диаметров для старой (μ_x) и для новой (μ_y) технологий. Но так как числовые значения μ_x и μ_y не известны, а лишь оценены при помощи соответствующих средних арифметических $\bar{x}$ и $\bar{y}$ (приближенных значений), то решение такой задачи можно получить путем проверки соответствующих статистических гипотез, для формулирования которых можно использовать ранее полученную расчетную информацию.

Проверку этих гипотезы проведем с использованием общего алгоритма, приведенного для рассматриваемого случая в п. 4.3.2 (нулевая гипотеза может быть сформулирована как утверждение о равенстве математических ожиданий диаметров катанки, выпускаемой по обоим технологиям):

1. *Формулируется нулевая гипотеза.* Нулевая гипотеза может быть сформулирована как утверждение о равенстве математических ожиданий диаметров катанки, выпускаемой по обеим технологиям. H_0: $\mu_x = \mu_y$.

2. *Формулируется альтернативная гипотеза.* Полученная предварительная информация говорит о том, что скорей всего (пока это предварительное заключение), установка ЧБК привела к уменьшению диаметра катанки. Поэтому из всех возможных альтернативных гипотез следует выбрать следующую H_1: $\mu_x < \mu_y$.

3. *Выбирается критерий для проверки H_0.* Для нормального закона распределения рассматриваемых случайных величин диаметров X и Y проверка сформулированной нулевой гипотезы проводится с использованием приближенного критерия Стьюдента (t-критерия), предназначенного для анализа выборок с различными значениями генеральных дисперсий, что установлено в ходе проверки, проведенной в подглаве 5.8. Использование данного критерия описано на с. 59.

4. *Рассчитывается статистика, относящаяся к выбранному критерию.* Используем уравнение (4.14) и данные из табл. 5.14:

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{N_x} + \dfrac{s_y^2}{N_y}}} = \frac{|5,98 - 5,47|}{\sqrt{\dfrac{0,0241}{29} + \dfrac{0,0142}{30}}} = 14,13.$$

5. *Находятся границы и местоположение критической области*. Значение границы критической области при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ следует определять как квантиль распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$ для числа степеней свободы, рассчитываемого по выражению (4.15). Предварительно рассчитаем величину c^2:

$$c^2 = \frac{\dfrac{s_x^2}{N_x}}{\dfrac{s_x^2}{N_x} + \dfrac{s_y^2}{N_y}} = \frac{\dfrac{0,0241}{29}}{\dfrac{0,0241}{29} + \dfrac{0,0142}{30}} = 0,6371,$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{c^2}{N_x - 1} + \frac{1 - c^2}{N_y - 1} = \frac{0,6371}{29 - 1} + \frac{1 - 0,6371}{30 - 1} = 0,03527,$$

откуда получим усредненное значение числа степеней свободы $\nu = 28,35$, примем $\nu = 28$.

Значение $t_{\alpha,\nu} = t_{0,05,\ 28} = 2,048$ можно определить по прил. 7.

Критическая область правосторонняя (см. рис. 4.13).

6. *Вывод о справедливости выдвинутой нулевой гипотезы*. Получили, что $t = 14,13 > t_{\alpha,\nu} = 2,048$, статистика t попадает в критическую область, поэтом нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий μ_x и μ_y отвергаем и в качестве рабочей принимаем альтернативную гипотезу $\mu_x < \mu_y$.

Вывод. В процессе статистического анализа опытных данных доказано, что после установки на рассматриваемом прокатном стане чистового блока клетей появилась возможность производить катанку меньшего диаметра, причем есть возможность перейти на выпуск катанки с повышенным классом точности.

Библиографический список

1. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 1980.
2. ГОСТ 15895–77. Статистические методы управления качеством продукции. Термины и определения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 1989.
3. ГОСТ Р 50779.0–95. Статистические методы. Основные положения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 1995.
4. ГОСТ Р 50779.10–2000. Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2000.
5. ГОСТ Р 50779.11–2000. Статистические методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2000.
6. ГОСТ Р 50779.21–2004. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2004.
7. Р 50.1.033–2001. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть 1. Критерии типа хи-квадрат. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2001.
8. Р 50.1.037–2002. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть 2. Непараметрические критерии. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2002.
9. Р 50.1.040–2002. Планирование эксперимента. Термины и определения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2002.
10. Налимов, В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов. — Москва : Наука, 1971. — 208 с.

11. Хайкин, Б. Е. Построение и анализ статистических распределений технологических параметров / Б. Е. Хайкин. — Свердловск : УПИ, 1984. 48 с.
12. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / И. И. Кобзарь. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 816 с. — ISBN 978-5-9221-1375-5.
13. Закс, Л. Статистическое оценивание : пер. с нем. / Л. Закс. — Москва : Статистика, 1970. — 598 с.
14. Большев, Л. Р. Таблицы математической статистики / Л. Р. Большев, Н. В. Смирнов. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математическоей литературы, 1983. — 416 с.
15. Степнов, М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний : справочник / М. Н. Степнов. — Москва : Машиностроение, 1985. — 232 с.
16. Степнов, М Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний : справочник / М. Н. Степнов, А. В. Шаврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Машиностроение, 2005. — 400 с. — ISBN 5217032723.
17. Математическая статистика : учебник / В. М. Иванова, В. Н. Калинина, Л. А. Нешумова [и др.]. — Москва : Высшая школа, 1981. — 368 с.
18. Смирнов, Н. В. Курс теории вероятности и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. — Москва : Высшая школа, 1965. — 512 с.
19. Калинина, В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. — Москва : Высшая школа, 1998. — 336 с. — ISBN 5-06-003496-8.
20. Коуден, Д. Статистические методы контроля качества : пер. с англ. / Д. Коуден. — Москва : Наука, 1961. — 623 с.
21. Мардиа, К. Таблицы F-распределений и распределений, связанных с ними / К. Мардиа, П. Земроч. — Москва : Наука, 1984. — 254 с.
22. Келли, Т. Л. Статистические таблицы : пер. с англ. / Т. Л. Келли. — Москва : ВЦ АН СССР, 1966. — 194 с.
23. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. — Москва : ИПК Изд-во стандартов, 2002.

24. Shapiro, S. S. A comparative study of various tests for normality / S. S. Shapiro, M. B. Wilk, H. J. Chen // JASA. — 1968. — Vol. 63, № 324. — P. 1343–1372.
25. Бурдин, Г. Д. Основы метрологии / Г. Д. Бурдин, Б. Н. Марков. — Москва : Изд-во стандартов, 1985. — 120 с.
26. Щербинин, А. Ф. Об относительной эффективности критерия хи-квадрат и его аналогах / А. Ф. Щербинин // Надежность и контроль качества. — 1986. — № 2. — С. 13–17.
27. Shapiro, S. Я. An approximate analysis of variance test normality / S. Я. Shapiro, R. S. Francia // JASA. — 1972. — Vol. 67, № 337. — P. 215–216.
28. Казакавичюс, К. А. Приближенные формулы для статистической обработки результатов механических испытаний / К. А. Казакавичюс // Завод. лаб. — 1988. — Т. 54, № 12. — С. 12–17.

Приложения

Приложение 1

Функция распределения для стандартного нормального распределения *U* (стандартного распределения Лапласа — Гаусса) [7]

U	Сотые доли *U*									
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981

U	Сотые доли U									
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Примечание. $\Phi(-\boldsymbol{U}) = 1 - \Phi(\boldsymbol{U})$.

Приложение 2

Функция распределения для χ^2-распределения (распределения Пирсона) [22]

χ^2	Число степеней свободы ν													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,520	0,081	0,008	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,683	0,199	0,037	0,005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,5	0,779	0,318	0,087	0,018	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,843	0,428	0,151	0,040	0,004	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,5	0,886	0,525	0,224	0,073	0,009	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,917	0,608	0,300	0,115	0,019	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3,5	0,939	0,679	0,377	0,165	0,033	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0,954	0,739	0,451	0,220	0,053	0,002	0	0	0	0	0	0	0	0
4,5	0,966	0,788	0,520	0,279	0,078	0,004	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,975	0,828	0,584	0,340	0,109	0,008	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0,986	0,888	0,694	0,460	0,185	0,020	0,001	0	0	0	0	0	0	0
7	0,992	0,928	0,779	0,571	0,275	0,042	0,003	0	0	0	0	0	0	0
8	0,995	0,954	0,844	0,667	0,371	0,076	0,008	0,001	0	0	0	0	0	0
9	0,997	0,971	0,891	0,747	0,468	0,122	0,017	0,001	0	0	0	0	0	0
10	0,998	0,981	0,925	0,811	0,560	0,180	0,032	0,003	0	0	0	0	0	0
12	0,999	0,993	0,965	0,899	0,715	0,321	0,084	0,013	0,001	0	0	0	0	0
14	1	0,997	0,984	0,949	0,827	0,474	0,170	0,038	0,006	0	0	0	0	0
16	1	0,999	0,993	0,975	0,900	0,618	0,283	0,085	0,017	0	0	0	0	0
18	1	1	0,997	0,988	0,945	0,737	0,413	0,158	0,041	0,001	0	0	0	0
20	1	1	0,999	0,994	0,971	0,828	0,542	0,253	0,083	0,003	0	0	0	0
25	1	1	1	0,999	0,995	0,950	0,799	0,538	0,275	0,031	0,001	0	0	0
30	1	1	1	1	0,999	0,988	0,930	0,776	0,534	0,125	0,011	0	0	0
35	1	1	1	1	1	0,998	0,980	0,912	0,757	0,305	0,053	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	0,995	0,971	0,895	0,530	0,157	0,001	0	0

χ^2	Число степеней свободы ν													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
45	1	1	1	1	1	1	0,999	0,992	0,961	0,729	0,326	0,009	0	0
50	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,988	0,866	0,527	0,034	0	0
55	1	1	1	1	1	1	1	1	0,996	0,943	0,709	0,094	0	0
60	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,978	0,843	0,203	0,001	0
65	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,993	0,925	0,353	0,003	0
70	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,968	0,522	0,010	0
75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,987	0,680	0,029	0
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,996	0,806	0,070	0
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,893	0,142	0
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,946	0,247	0
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,975	0,377	0
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,989	0,519	0,001
110	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,768	0,006
120	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,916	0,034
130	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,976	0,121
140	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,995	0,290
150	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,515
160	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,727
170	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,874
180	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,952
190	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,985
200	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,996
250	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
300	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Приложение 3

Функция распределения для *t*-распределения (распределения Стьюдента) [22]

t	Число степеней свободы ν													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1	0,5317	0,5367	0,5379	0,5384	0,5388	0,5392	0,4607	0,4606	0,4605	0,4604	0,4604	0,4603	0,4603	0,4602
0,2	0,5628	0,5729	0,5753	0,5764	0,5773	0,5779	0,4218	0,4215	0,4214	0,4212	0,4211	0,4210	0,4209	0,4209
0,3	0,5928	0,6081	0,6119	0,6136	0,6148	0,6159	0,3836	0,3833	0,3831	0,3829	0,3827	0,3825	0,3824	0,3823
0,4	0,6211	0,6420	0,6472	0,6495	0,6512	0,6526	0,3467	0,3463	0,3460	0,3456	0,3454	0,3452	0,3450	0,3449
0,5	0,6476	0,6743	0,6809	0,6838	0,6861	0,6878	0,3113	0,3107	0,3104	0,3099	0,3096	0,3093	0,3091	0,3089
0,6	0,6720	0,7046	0,7127	0,7163	0,7191	0,7213	0,2776	0,2770	0,2765	0,2759	0,2756	0,2752	0,2749	0,2747
0,7	0,6944	0,7328	0,7424	0,7467	0,7501	0,7527	0,2460	0,2452	0,2447	0,2440	0,2436	0,2431	0,2428	0,2425
0,8	0,7148	0,7589	0,7700	0,7750	0,7788	0,7819	0,2166	0,2156	0,2150	0,2142	0,2137	0,2132	0,2128	0,2125
0,9	0,7333	0,7828	0,7953	0,8010	0,8054	0,8088	0,1894	0,1884	0,1876	0,1868	0,1862	0,1856	0,1851	0,1848
1	0,7500	0,8045	0,8184	0,8247	0,8296	0,8334	0,1646	0,1634	0,1627	0,1617	0,1611	0,1604	0,1599	0,1595
1,1	0,7651	0,8242	0,8393	0,8461	0,8514	0,8557	0,1422	0,1409	0,1400	0,1390	0,1383	0,1376	0,1370	0,1365
1,2	0,7789	0,8419	0,8581	0,8654	0,8711	0,8756	0,1221	0,1207	0,1198	0,1186	0,1179	0,1171	0,1165	0,1160
1,3	0,7913	0,8578	0,8748	0,8826	0,8886	0,8934	0,1042	0,1027	0,1018	0,1005	0,0998	0,0989	0,0983	0,0978
1,4	0,8026	0,8720	0,8898	0,8979	0,9041	0,9091	0,0884	0,0869	0,0859	0,0846	0,0838	0,0830	0,0823	0,0818
1,5	0,8128	0,8847	0,9030	0,9114	0,9177	0,9228	0,0746	0,0731	0,0720	0,0707	0,0700	0,0691	0,0684	0,0679
1,6	0,8222	0,8960	0,9148	0,9232	0,9297	0,9348	0,0626	0,0611	0,0600	0,0587	0,0579	0,0571	0,0564	0,0559
1,7	0,8307	0,9062	0,9251	0,9335	0,9400	0,9451	0,0523	0,0508	0,0497	0,0484	0,0477	0,0468	0,0461	0,0456
1,8	0,8386	0,9152	0,9341	0,9426	0,9490	0,9540	0,0435	0,0420	0,0410	0,0397	0,0389	0,0381	0,0374	0,0369
1,9	0,8458	0,9232	0,9421	0,9504	0,9567	0,9616	0,0360	0,0345	0,0335	0,0323	0,0316	0,0308	0,0302	0,0297

t	Число степеней свободы ν													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
2	0,8524	0,9303	0,9490	0,9572	0,9633	0,9680	0,0296	0,0282	0,0273	0,0262	0,0255	0,0247	0,0241	0,0237
2,1	0,8585	0,9367	0,9551	0,9631	0,9690	0,9735	0,0243	0,0230	0,0221	0,0210	0,0204	0,0197	0,0191	0,0187
2,2	0,8642	0,9424	0,9605	0,9681	0,9738	0,9781	0,0199	0,0186	0,0178	0,0168	0,0162	0,0156	0,0151	0,0147
2,3	0,8695	0,9475	0,9651	0,9725	0,9779	0,9819	0,0162	0,0150	0,0143	0,0134	0,0128	0,0122	0,0118	0,0114
2,4	0,8743	0,9521	0,9692	0,9763	0,9813	0,9851	0,0131	0,0121	0,0114	0,0106	0,0101	0,0095	0,0091	0,0088
2,5	0,8789	0,9561	0,9728	0,9795	0,9843	0,9877	0,0106	0,0097	0,0091	0,0083	0,0079	0,0074	0,0070	0,0067
2,6	0,8831	0,9598	0,9759	0,9823	0,9868	0,9900	0,0086	0,0077	0,0072	0,0065	0,0061	0,0057	0,0054	0,0051
2,7	0,8871	0,9631	0,9786	0,9847	0,9888	0,9918	0,0069	0,0061	0,0056	0,0051	0,0047	0,0043	0,0041	0,0039
2,8	0,8908	0,9661	0,9810	0,9867	0,9906	0,9933	0,0055	0,0049	0,0044	0,0039	0,0036	0,0033	0,0031	0,0029
2,9	0,8943	0,9687	0,9831	0,9885	0,9921	0,9945	0,0044	0,0038	0,0035	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021
3	0,8976	0,9712	0,9850	0,9900	0,9933	0,9955	0,0035	0,0030	0,0027	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016
3,1	0,9007	0,9734	0,9866	0,9913	0,9944	0,9963	0,0028	0,0024	0,0021	0,0018	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012
3,2	0,9036	0,9753	0,9880	0,9925	0,9953	0,9970	0,0022	0,0019	0,0016	0,0013	0,0012	0,0010	0,0009	0,0008
3,3	0,9063	0,9771	0,9893	0,9934	0,9960	0,9976	0,0018	0,0015	0,0012	0,0010	0,0009	0,0008	0,0007	0,0006
3,4	0,9089	0,9788	0,9904	0,9943	0,9966	0,9980	0,0014	0,0011	0,0010	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004
3,5	0,9114	0,9803	0,9914	0,9950	0,9971	0,9984	0,0011	0,0009	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0003
3,6	0,9138	0,9816	0,9922	0,9956	0,9976	0,9987	0,0009	0,0007	0,0006	0,0004	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002
3,7	0,9160	0,9829	0,9930	0,9962	0,9979	0,9989	0,0007	0,0005	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002
3,8	0,9181	0,9840	0,9937	0,9966	0,9983	0,9991	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
3,9	0,9201	0,9850	0,9943	0,9971	0,9985	0,9993	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4	0,9220	0,9860	0,9948	0,9974	0,9987	0,9994	0,0004	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
4,1	0,9239	0,9869	0,9953	0,9977	0,9989	0,9995	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
4,2	0,9256	0,9877	0,9958	0,9980	0,9991	0,9996	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
4,3	0,9273	0,9884	0,9961	0,9982	0,9992	0,9997	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,4	0,9289	0,9891	0,9965	0,9984	0,9993	0,9997	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

t	Число степеней свободы ν													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
4,5	0,9304	0,9898	0,9968	0,9986	0,9994	0,9998	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,6	0,9319	0,9903	0,9971	0,9988	0,9995	0,9998	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,7	0,9333	0,9909	0,9973	0,9989	0,9996	0,9999	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,8	0,9346	0,9914	0,9976	0,9990	0,9996	0,9999	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 4

Таблица П4.1

Функция распределения для *F*-распределения (распределения Фишера) для числа степеней свободы $\nu_1 = 5$ [21]

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0250	0,0149	0,0122	0,0110	0,0101	0,0094	0,0090	0,0088	0,0086	0,0084	0,0083	0,0082	0,0081	0,0080
0,2	0,0756	0,0577	0,0510	0,0476	0,0448	0,0425	0,0413	0,0405	0,0400	0,0394	0,0390	0,0386	0,0382	0,0380
0,3	0,1275	0,1140	0,1062	0,1018	0,0980	0,0947	0,0929	0,0918	0,0910	0,0900	0,0894	0,0887	0,0882	0,0878
0,4	0,1747	0,1739	0,1687	0,1652	0,1618	0,1587	0,1570	0,1559	0,1551	0,1541	0,1535	0,1528	0,1522	0,1518
0,5	0,2164	0,2326	0,2325	0,2314	0,2300	0,2284	0,2274	0,2267	0,2263	0,2256	0,2252	0,2248	0,2244	0,2241
0,6	0,2532	0,2878	0,2944	0,2968	0,2982	0,2992	0,2995	0,2997	0,2998	0,2999	0,2999	0,3000	0,3000	0,3000
0,7	0,2856	0,3386	0,3525	0,3590	0,3640	0,3681	0,3702	0,3714	0,3723	0,3733	0,3740	0,3747	0,3753	0,3757
0,8	0,3144	0,3849	0,4063	0,4170	0,4258	0,4333	0,4373	0,4398	0,4415	0,4437	0,4450	0,4466	0,4478	0,4487
0,9	0,3401	0,4269	0,4554	0,4702	0,4828	0,4938	0,4998	0,5035	0,5061	0,5094	0,5115	0,5139	0,5157	0,5172

Продолжение табл. П4.1

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
1	0,3632	0,4649	0,5000	0,5187	0,5349	0,5491	0,5570	0,5619	0,5654	0,5698	0,5725	0,5757	0,5782	0,5801
1,1	0,3841	0,4992	0,5404	0,5626	0,5820	0,5992	0,6087	0,6148	0,6190	0,6244	0,6277	0,6317	0,6347	0,6371
1,2	0,4032	0,5304	0,5768	0,6022	0,6244	0,6442	0,6552	0,6622	0,6670	0,6733	0,6772	0,6817	0,6853	0,6880
1,3	0,4206	0,5586	0,6098	0,6378	0,6624	0,6844	0,6966	0,7044	0,7097	0,7167	0,7210	0,7261	0,7300	0,7331
1,4	0,4366	0,5843	0,6395	0,6698	0,6964	0,7201	0,7333	0,7417	0,7474	0,7549	0,7596	0,7650	0,7692	0,7725
1,5	0,4513	0,6077	0,6664	0,6985	0,7267	0,7518	0,7657	0,7745	0,7806	0,7885	0,7933	0,7990	0,8034	0,8069
1,6	0,4650	0,6291	0,6907	0,7243	0,7538	0,7799	0,7943	0,8033	0,8096	0,8177	0,8227	0,8285	0,8330	0,8365
1,7	0,4777	0,6487	0,7127	0,7476	0,7779	0,8047	0,8193	0,8286	0,8349	0,8431	0,8481	0,8540	0,8585	0,8620
1,8	0,4896	0,6667	0,7327	0,7685	0,7994	0,8266	0,8413	0,8506	0,8569	0,8651	0,8701	0,8759	0,8803	0,8838
1,9	0,5007	0,6832	0,7509	0,7873	0,8187	0,8459	0,8606	0,8698	0,8761	0,8841	0,8890	0,8947	0,8990	0,9024
2	0,5111	0,6985	0,7675	0,8043	0,8358	0,8630	0,8775	0,8865	0,8927	0,9005	0,9052	0,9108	0,9149	0,9182
2,1	0,5209	0,7125	0,7826	0,8197	0,8511	0,8780	0,8923	0,9011	0,9070	0,9146	0,9192	0,9244	0,9284	0,9315
2,2	0,5301	0,7256	0,7964	0,8336	0,8648	0,8913	0,9052	0,9137	0,9195	0,9267	0,9311	0,9361	0,9399	0,9428
2,3	0,5388	0,7377	0,8091	0,8462	0,8771	0,9030	0,9165	0,9247	0,9302	0,9371	0,9413	0,9460	0,9495	0,9523
2,4	0,5471	0,7490	0,8207	0,8576	0,8881	0,9134	0,9264	0,9343	0,9395	0,9461	0,9500	0,9544	0,9577	0,9602
2,5	0,5549	0,7595	0,8313	0,8680	0,8980	0,9226	0,9351	0,9426	0,9476	0,9537	0,9574	0,9615	0,9646	0,9669
2,6	0,5623	0,7693	0,8411	0,8775	0,9069	0,9307	0,9427	0,9498	0,9545	0,9603	0,9637	0,9675	0,9703	0,9725
2,7	0,5694	0,7784	0,8502	0,8861	0,9149	0,9379	0,9493	0,9561	0,9605	0,9659	0,9691	0,9726	0,9752	0,9771
2,8	0,5761	0,7870	0,8585	0,8940	0,9221	0,9443	0,9552	0,9615	0,9657	0,9707	0,9737	0,9769	0,9792	0,9810
2,9	0,5826	0,7950	0,8663	0,9012	0,9286	0,9499	0,9603	0,9663	0,9702	0,9749	0,9776	0,9805	0,9827	0,9843
3	0,5887	0,8026	0,8734	0,9078	0,9344	0,9550	0,9648	0,9704	0,9741	0,9784	0,9809	0,9836	0,9855	0,9869
3,5	0,6159	0,8343	0,9023	0,9335	0,9565	0,9730	0,9804	0,9844	0,9869	0,9898	0,9914	0,9930	0,9941	0,9949
4	0,6383	0,8584	0,9228	0,9508	0,9703	0,9834	0,9888	0,9916	0,9933	0,9951	0,9960	0,9970	0,9976	0,9980
4,5	0,6572	0,8772	0,9378	0,9628	0,9792	0,9895	0,9934	0,9954	0,9965	0,9976	0,9982	0,9987	0,9990	0,9992
5	0,6734	0,8922	0,9490	0,9713	0,9851	0,9932	0,9961	0,9974	0,9981	0,9988	0,9991	0,9994	0,9996	0,9997

Окончание табл. П4.1

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
6	0,7000	0,9144	0,9643	0,9820	0,9919	0,9970	0,9985	0,9991	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000
7	0,7210	0,9300	0,9739	0,9881	0,9953	0,9985	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,7381	0,9413	0,9802	0,9918	0,9971	0,9992	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0,7524	0,9499	0,9846	0,9941	0,9982	0,9996	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,7646	0,9566	0,9878	0,9957	0,9988	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,8319	0,9836	0,9974	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	0,8623	0,9908	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
40	0,8806	0,9940	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,8931	0,9957	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	0,9023	0,9967	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9095	0,9974	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
80	0,9153	0,9978	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица П4.2

Функция распределения для *F*-распределения (распределения Фишера) для числа степеней свободы $\nu_1 = 10$ [21]

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0101	0,0024	0,0012	0,0008	0,0006	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,2	0,0493	0,0226	0,0149	0,0115	0,0090	0,0071	0,0062	0,0056	0,0053	0,0049	0,0046	0,0043	0,0041	0,0040
0,3	0,0979	0,0645	0,0497	0,0419	0,0354	0,0301	0,0273	0,0256	0,0244	0,0230	0,0221	0,0211	0,0203	0,0198
0,4	0,1449	0,1190	0,1020	0,0917	0,0823	0,0737	0,0690	0,0660	0,0639	0,0612	0,0596	0,0577	0,0562	0,0550

Продолжение табл. П4.2

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0,5	0,1877	0,1780	0,1642	0,1545	0,1448	0,1354	0,1298	0,1262	0,1236	0,1203	0,1181	0,1156	0,1136	0,1121
0,6	0,2258	0,2364	0,2298	0,2236	0,2166	0,2091	0,2044	0,2012	0,1989	0,1958	0,1938	0,1914	0,1895	0,1880
0,7	0,2596	0,2918	0,2946	0,2938	0,2916	0,2884	0,2861	0,2844	0,2832	0,2814	0,2802	0,2788	0,2776	0,2766
0,8	0,2897	0,3430	0,3561	0,3616	0,3655	0,3682	0,3693	0,3699	0,3703	0,3706	0,3708	0,3710	0,3711	0,3711
0,9	0,3166	0,3899	0,4131	0,4251	0,4355	0,4446	0,4497	0,4529	0,4552	0,4581	0,4599	0,4621	0,4638	0,4651
1	0,3409	0,4323	0,4651	0,4834	0,5000	0,5155	0,5245	0,5304	0,5346	0,5401	0,5436	0,5479	0,5512	0,5539
1,1	0,3628	0,4708	0,5122	0,5362	0,5584	0,5797	0,5922	0,6005	0,6065	0,6144	0,6194	0,6255	0,6303	0,6342
1,2	0,3828	0,5056	0,5546	0,5835	0,6106	0,6368	0,6523	0,6627	0,6700	0,6799	0,6862	0,6938	0,6998	0,7046
1,3	0,4010	0,5370	0,5927	0,6257	0,6569	0,6870	0,7049	0,7167	0,7251	0,7364	0,7436	0,7523	0,7591	0,7647
1,4	0,4178	0,5655	0,6269	0,6633	0,6977	0,7307	0,7502	0,7631	0,7723	0,7844	0,7922	0,8015	0,8088	0,8147
1,5	0,4332	0,5914	0,6575	0,6967	0,7334	0,7686	0,7891	0,8025	0,8121	0,8247	0,8326	0,8421	0,8496	0,8555
1,6	0,4475	0,6150	0,6850	0,7263	0,7647	0,8011	0,8221	0,8358	0,8454	0,8580	0,8660	0,8753	0,8826	0,8884
1,7	0,4608	0,6365	0,7097	0,7525	0,7921	0,8290	0,8501	0,8636	0,8731	0,8854	0,8931	0,9021	0,9090	0,9145
1,8	0,4732	0,6561	0,7319	0,7759	0,8160	0,8529	0,8737	0,8869	0,8960	0,9078	0,9151	0,9235	0,9299	0,9349
1,9	0,4848	0,6741	0,7519	0,7966	0,8369	0,8734	0,8935	0,9062	0,9149	0,9260	0,9327	0,9405	0,9463	0,9508
2	0,4956	0,6906	0,7700	0,8150	0,8552	0,8909	0,9102	0,9222	0,9304	0,9406	0,9468	0,9538	0,9590	0,9630
2,1	0,5059	0,7058	0,7864	0,8315	0,8711	0,9058	0,9242	0,9355	0,9431	0,9525	0,9580	0,9643	0,9688	0,9723
2,2	0,5155	0,7199	0,8012	0,8462	0,8851	0,9186	0,9360	0,9465	0,9534	0,9620	0,9669	0,9724	0,9764	0,9794
2,3	0,5245	0,7329	0,8147	0,8593	0,8974	0,9295	0,9459	0,9556	0,9619	0,9696	0,9740	0,9788	0,9822	0,9847
2,4	0,5331	0,7449	0,8270	0,8711	0,9082	0,9388	0,9541	0,9631	0,9688	0,9757	0,9795	0,9837	0,9866	0,9887
2,5	0,5413	0,7561	0,8382	0,8817	0,9177	0,9469	0,9611	0,9693	0,9744	0,9805	0,9839	0,9875	0,9899	0,9916
2,6	0,5490	0,7665	0,8484	0,8912	0,9261	0,9537	0,9669	0,9744	0,9790	0,9844	0,9873	0,9904	0,9924	0,9939
2,7	0,5564	0,7762	0,8578	0,8998	0,9335	0,9597	0,9719	0,9786	0,9828	0,9875	0,9900	0,9926	0,9943	0,9955
2,8	0,5634	0,7852	0,8664	0,9075	0,9401	0,9648	0,9760	0,9821	0,9858	0,9900	0,9922	0,9943	0,9957	0,9967
2,9	0,5701	0,7937	0,8742	0,9146	0,9459	0,9692	0,9795	0,9850	0,9883	0,9920	0,9938	0,9957	0,9968	0,9976

Окончание табл. П4.2

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
3	0,5765	0,8016	0,8815	0,9209	0,9511	0,9730	0,9825	0,9875	0,9904	0,9935	0,9951	0,9967	0,9976	0,9982
3,5	0,6047	0,8347	0,9104	0,9451	0,9696	0,9856	0,9918	0,9947	0,9963	0,9978	0,9985	0,9991	0,9994	0,9996
4	0,6279	0,8596	0,9304	0,9606	0,9804	0,9920	0,9960	0,9976	0,9985	0,9992	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999
4,5	0,6475	0,8788	0,9447	0,9710	0,9870	0,9954	0,9979	0,9989	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
5	0,6643	0,8940	0,9552	0,9781	0,9910	0,9972	0,9989	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,6917	0,9164	0,9692	0,9868	0,9955	0,9989	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0,7134	0,9319	0,9778	0,9915	0,9975	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,7310	0,9432	0,9834	0,9943	0,9986	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0,7458	0,9516	0,9872	0,9960	0,9991	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,7583	0,9582	0,9899	0,9971	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,8276	0,9844	0,9980	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	0,8588	0,9913	0,9992	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
40	0,8775	0,9943	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,8903	0,9959	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	0,8998	0,9969	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9072	0,9975	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
80	0,9132	0,9980	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица П4.3

Функция распределения для *F*-распределения (распределения Фишера) для числа степеней свободы $\nu_1 = 20$ [21]

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0049	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,0369	0,0095	0,0039	0,0021	0,0011	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,3	0,0829	0,0402	0,0237	0,0161	0,0105	0,0066	0,0049	0,0039	0,0033	0,0027	0,0023	0,0019	0,0016	0,0015
0,4	0,1295	0,0888	0,0649	0,0510	0,0389	0,0286	0,0233	0,0201	0,0180	0,0154	0,0139	0,0121	0,0109	0,0100
0,5	0,1727	0,1464	0,1225	0,1061	0,0898	0,0739	0,0648	0,0588	0,0547	0,0493	0,0459	0,0420	0,0390	0,0366
0,6	0,2114	0,2061	0,1887	0,1745	0,1587	0,1417	0,1309	0,1235	0,1181	0,1107	0,1060	0,1002	0,0956	0,0919
0,7	0,2460	0,2640	0,2570	0,2487	0,2381	0,2250	0,2161	0,2095	0,2046	0,1977	0,1930	0,1872	0,1824	0,1784
0,8	0,2768	0,3182	0,3235	0,3232	0,3205	0,3154	0,3113	0,3080	0,3053	0,3014	0,2986	0,2951	0,2920	0,2894
0,9	0,3044	0,3680	0,3858	0,3942	0,4007	0,4057	0,4080	0,4093	0,4102	0,4111	0,4116	0,4120	0,4123	0,4125
1	0,3293	0,4133	0,4430	0,4598	0,4755	0,4908	0,5000	0,5063	0,5109	0,5173	0,5214	0,5266	0,5308	0,5343
1,1	0,3517	0,4542	0,4948	0,5193	0,5432	0,5678	0,5833	0,5942	0,6022	0,6135	0,6210	0,6304	0,6382	0,6448
1,2	0,3722	0,4913	0,5413	0,5724	0,6034	0,6357	0,6563	0,6707	0,6815	0,6965	0,7065	0,7191	0,7295	0,7382
1,3	0,3909	0,5247	0,5829	0,6195	0,6561	0,6943	0,7186	0,7355	0,7480	0,7654	0,7769	0,7913	0,8030	0,8127
1,4	0,4080	0,5549	0,6200	0,6610	0,7020	0,7442	0,7707	0,7891	0,8025	0,8209	0,8330	0,8478	0,8597	0,8695
1,5	0,4238	0,5823	0,6531	0,6975	0,7415	0,7863	0,8139	0,8327	0,8463	0,8646	0,8765	0,8908	0,9021	0,9112
1,6	0,4385	0,6072	0,6826	0,7296	0,7756	0,8216	0,8493	0,8678	0,8810	0,8985	0,9095	0,9226	0,9327	0,9407
1,7	0,4521	0,6298	0,7089	0,7577	0,8049	0,8509	0,8780	0,8957	0,9082	0,9243	0,9343	0,9458	0,9544	0,9611
1,8	0,4647	0,6504	0,7325	0,7825	0,8300	0,8753	0,9013	0,9179	0,9293	0,9438	0,9525	0,9624	0,9695	0,9748
1,9	0,4766	0,6692	0,7536	0,8043	0,8516	0,8956	0,9201	0,9354	0,9457	0,9584	0,9659	0,9740	0,9798	0,9839
2	0,4877	0,6865	0,7726	0,8235	0,8702	0,9124	0,9352	0,9491	0,9582	0,9693	0,9756	0,9822	0,9867	0,9899
2,1	0,4981	0,7024	0,7897	0,8404	0,8861	0,9264	0,9474	0,9599	0,9679	0,9773	0,9825	0,9879	0,9913	0,9937
2,2	0,5079	0,7170	0,8051	0,8554	0,8999	0,9380	0,9573	0,9683	0,9753	0,9833	0,9875	0,9917	0,9944	0,9961

Окончание табл. П4.3

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
2,3	0,5172	0,7305	0,8190	0,8687	0,9118	0,9476	0,9652	0,9750	0,9810	0,9877	0,9911	0,9944	0,9964	0,9976
2,4	0,5259	0,7429	0,8316	0,8806	0,9221	0,9557	0,9715	0,9802	0,9853	0,9909	0,9937	0,9962	0,9977	0,9985
2,5	0,5343	0,7545	0,8430	0,8911	0,9310	0,9624	0,9767	0,9843	0,9887	0,9933	0,9955	0,9974	0,9985	0,9991
2,6	0,5421	0,7652	0,8534	0,9005	0,9388	0,9680	0,9809	0,9875	0,9912	0,9950	0,9968	0,9983	0,9990	0,9995
2,7	0,5497	0,7752	0,8629	0,9089	0,9456	0,9727	0,9843	0,9900	0,9932	0,9963	0,9977	0,9988	0,9994	0,9997
2,8	0,5568	0,7845	0,8716	0,9164	0,9515	0,9767	0,9870	0,9920	0,9947	0,9973	0,9984	0,9992	0,9996	0,9998
2,9	0,5636	0,7932	0,8795	0,9232	0,9566	0,9800	0,9893	0,9936	0,9959	0,9980	0,9988	0,9995	0,9998	0,9999
3	0,5701	0,8013	0,8868	0,9293	0,9612	0,9828	0,9911	0,9949	0,9968	0,9985	0,9992	0,9996	0,9998	0,9999
3,5	0,5989	0,8351	0,9154	0,9520	0,9770	0,9916	0,9964	0,9982	0,9990	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
4	0,6225	0,8604	0,9349	0,9662	0,9857	0,9957	0,9984	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,5	0,6425	0,8798	0,9487	0,9755	0,9908	0,9977	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,6595	0,8951	0,9587	0,9818	0,9938	0,9987	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,6874	0,9176	0,9719	0,9892	0,9970	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0,7094	0,9330	0,9799	0,9932	0,9984	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,7274	0,9442	0,9851	0,9955	0,9991	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0,7424	0,9526	0,9886	0,9968	0,9995	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,7551	0,9591	0,9910	0,9977	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,8253	0,9848	0,9982	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	0,8570	0,9916	0,9993	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
40	0,8760	0,9945	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,8890	0,9960	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	0,8986	0,9970	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9061	0,9976	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
80	0,9121	0,9980	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Таблица П4.4

Функция распределения для *F*-распределения (распределения Фишера) для числа степеней свободы $\nu_1 = 50$ [21]

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,0298	0,0041	0,0009	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,0739	0,0267	0,0113	0,0054	0,0022	0,0007	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,1202	0,0701	0,0426	0,0277	0,0161	0,0079	0,0045	0,0029	0,0020	0,0012	0,0008	0,0004	0,0003	0,0002
0,5	0,1635	0,1259	0,0948	0,0736	0,0532	0,0344	0,0244	0,0185	0,0147	0,0103	0,0079	0,0054	0,0038	0,0028
0,6	0,2026	0,1861	0,1600	0,1389	0,1153	0,0895	0,0732	0,0620	0,0541	0,0435	0,0369	0,0293	0,0236	0,0192
0,7	0,2376	0,2455	0,2303	0,2150	0,1955	0,1710	0,1534	0,1403	0,1301	0,1154	0,1054	0,0926	0,0819	0,0729
0,8	0,2689	0,3016	0,3002	0,2942	0,2839	0,2687	0,2564	0,2465	0,2383	0,2257	0,2165	0,2039	0,1925	0,1823
0,9	0,2969	0,3534	0,3665	0,3710	0,3727	0,3714	0,3688	0,3660	0,3635	0,3591	0,3555	0,3502	0,3450	0,3400
1	0,3221	0,4006	0,4275	0,4425	0,4564	0,4701	0,4786	0,4846	0,4891	0,4956	0,5000	0,5058	0,5109	0,5154
1,1	0,3449	0,4433	0,4827	0,5072	0,5322	0,5595	0,5782	0,5922	0,6031	0,6195	0,6313	0,6473	0,6617	0,6748
1,2	0,3657	0,4819	0,5323	0,5649	0,5991	0,6375	0,6640	0,6838	0,6995	0,7227	0,7392	0,7614	0,7812	0,7988
1,3	0,3846	0,5167	0,5764	0,6157	0,6571	0,7035	0,7352	0,7586	0,7767	0,8032	0,8216	0,8457	0,8663	0,8840
1,4	0,4021	0,5481	0,6156	0,6601	0,7069	0,7584	0,7928	0,8176	0,8365	0,8632	0,8812	0,9037	0,9221	0,9370
1,5	0,4181	0,5765	0,6505	0,6990	0,7493	0,8035	0,8386	0,8632	0,8814	0,9063	0,9224	0,9416	0,9563	0,9675
1,6	0,4329	0,6022	0,6814	0,7328	0,7853	0,8402	0,8746	0,8979	0,9146	0,9366	0,9501	0,9654	0,9763	0,9839
1,7	0,4467	0,6256	0,7089	0,7623	0,8158	0,8700	0,9026	0,9239	0,9387	0,9574	0,9683	0,9798	0,9874	0,9923
1,8	0,4595	0,6468	0,7334	0,7880	0,8416	0,8941	0,9243	0,9434	0,9561	0,9715	0,9800	0,9884	0,9935	0,9964
1,9	0,4715	0,6662	0,7552	0,8104	0,8634	0,9135	0,9411	0,9578	0,9686	0,9810	0,9874	0,9934	0,9967	0,9984
2	0,4828	0,6840	0,7748	0,8300	0,8819	0,9292	0,9541	0,9686	0,9775	0,9873	0,9921	0,9963	0,9983	0,9993
2,1	0,4933	0,7003	0,7923	0,8472	0,8976	0,9418	0,9641	0,9765	0,9839	0,9916	0,9951	0,9979	0,9992	0,9997
2,2	0,5033	0,7152	0,8080	0,8624	0,9109	0,9521	0,9719	0,9824	0,9884	0,9944	0,9969	0,9988	0,9996	0,9999

Окончание табл. П4.4

F	Число степеней свободы ν_2													
	1	3	5	7	10	15	20	25	30	40	50	70	100	150
2,3	0,5127	0,7290	0,8222	0,8757	0,9223	0,9604	0,9779	0,9868	0,9916	0,9962	0,9981	0,9993	0,9998	0,9999
2,4	0,5216	0,7418	0,8349	0,8874	0,9321	0,9672	0,9825	0,9900	0,9940	0,9975	0,9988	0,9996	0,9999	1,0000
2,5	0,5300	0,7536	0,8465	0,8978	0,9404	0,9727	0,9861	0,9924	0,9956	0,9983	0,9992	0,9998	0,9999	1,0000
2,6	0,5380	0,7645	0,8570	0,9070	0,9476	0,9772	0,9890	0,9942	0,9968	0,9988	0,9995	0,9999	1,0000	1,0000
2,7	0,5456	0,7747	0,8665	0,9153	0,9538	0,9809	0,9912	0,9956	0,9977	0,9992	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
2,8	0,5528	0,7842	0,8752	0,9226	0,9591	0,9840	0,9929	0,9966	0,9983	0,9995	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000
2,9	0,5597	0,7930	0,8832	0,9291	0,9638	0,9865	0,9943	0,9974	0,9987	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,5663	0,8013	0,8904	0,9350	0,9678	0,9886	0,9954	0,9980	0,9991	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
3,5	0,5953	0,8355	0,9187	0,9566	0,9815	0,9948	0,9983	0,9994	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,6193	0,8610	0,9379	0,9699	0,9888	0,9975	0,9993	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,5	0,6394	0,8805	0,9513	0,9784	0,9930	0,9987	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,6567	0,8959	0,9610	0,9840	0,9954	0,9993	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,6848	0,9184	0,9737	0,9907	0,9978	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0,7071	0,9338	0,9813	0,9942	0,9989	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,7252	0,9449	0,9861	0,9962	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0,7403	0,9532	0,9894	0,9973	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,7531	0,9596	0,9917	0,9981	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,8240	0,9850	0,9984	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	0,8559	0,9917	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
40	0,8750	0,9946	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,8881	0,9961	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
60	0,8978	0,9970	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9053	0,9976	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
80	0,9114	0,9981	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Приложение 5

Квантили стандартного нормального распределения u_p порядка P [22]

P	Тысячные доли P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,000	0,003	0,005	0,008	0,010	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
0,51	0,025	0,028	0,030	0,033	0,035	0,038	0,040	0,043	0,045	0,048
0,52	0,050	0,053	0,055	0,058	0,060	0,063	0,065	0,068	0,070	0,073
0,53	0,075	0,078	0,080	0,083	0,085	0,088	0,090	0,093	0,095	0,098
0,54	0,100	0,103	0,105	0,108	0,111	0,113	0,116	0,118	0,121	0,123
0,55	0,126	0,128	0,131	0,133	0,136	0,138	0,141	0,143	0,146	0,148
0,56	0,151	0,154	0,156	0,159	0,161	0,164	0,166	0,169	0,171	0,174
0,57	0,176	0,179	0,181	0,184	0,187	0,189	0,192	0,194	0,197	0,199
0,58	0,202	0,204	0,207	0,210	0,212	0,215	0,217	0,220	0,222	0,225
0,59	0,228	0,230	0,233	0,235	0,238	0,240	0,243	0,246	0,248	0,251
0,60	0,253	0,256	0,259	0,261	0,264	0,266	0,269	0,272	0,274	0,277
0,61	0,279	0,282	0,285	0,287	0,290	0,292	0,295	0,298	0,300	0,303
0,62	0,305	0,308	0,311	0,313	0,316	0,319	0,321	0,324	0,327	0,329
0,63	0,332	0,335	0,337	0,340	0,342	0,345	0,348	0,350	0,353	0,356
0,64	0,358	0,361	0,364	0,366	0,369	0,372	0,375	0,377	0,380	0,383
0,65	0,385	0,388	0,391	0,393	0,396	0,399	0,402	0,404	0,407	0,410
0,66	0,412	0,415	0,418	0,421	0,423	0,426	0,429	0,432	0,434	0,437
0,67	0,440	0,443	0,445	0,448	0,451	0,454	0,457	0,459	0,462	0,465
0,68	0,468	0,470	0,473	0,476	0,479	0,482	0,485	0,487	0,490	0,493
0,69	0,496	0,499	0,502	0,504	0,507	0,510	0,513	0,516	0,519	0,522
0,70	0,524	0,527	0,530	0,533	0,536	0,539	0,542	0,545	0,548	0,550
0,71	0,553	0,556	0,559	0,562	0,565	0,568	0,571	0,574	0,577	0,580
0,72	0,583	0,586	0,589	0,592	0,595	0,598	0,601	0,604	0,607	0,610
0,73	0,613	0,616	0,619	0,622	0,625	0,628	0,631	0,634	0,637	0,640
0,74	0,643	0,646	0,650	0,653	0,656	0,659	0,662	0,665	0,668	0,671
0,75	0,674	0,678	0,681	0,684	0,687	0,690	0,693	0,697	0,700	0,703
0,76	0,706	0,710	0,713	0,716	0,719	0,722	0,726	0,729	0,732	0,736
0,77	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755	0,759	0,762	0,765	0,769
0,78	0,772	0,776	0,779	0,782	0,786	0,789	0,793	0,796	0,800	0,803
0,79	0,806	0,810	0,813	0,817	0,820	0,824	0,827	0,831	0,834	0,838
0,80	0,842	0,845	0,849	0,852	0,856	0,860	0,863	0,867	0,871	0,874
0,81	0,878	0,882	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912
0,82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
0,83	0,954	0,958	0,962	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990

P	Тысячные доли P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	1,015	1,019	1,024	1,028	1,032
0,85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1,067	1,071	1,076
0,86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	1,103	1,108	1,112	1,117	1,122
0,87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
0,88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
0,89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	1,254	1,259	1,265	1,270	1,276
0,90	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
0,91	1,341	1,347	1,353	1,359	1,366	1,372	1,379	1,385	1,392	1,398
0,92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	1,440	1,447	1,454	1,461	1,468
0,93	1,476	1,483	1,491	1,499	1,506	1,514	1,522	1,530	1,538	1,546
0,94	1,555	1,563	1,572	1,580	1,589	1,598	1,607	1,616	1,626	1,635
0,95	1,645	1,655	1,665	1,675	1,685	1,695	1,706	1,717	1,728	1,739
0,96	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	1,812	1,825	1,838	1,852	1,866
0,97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
0,98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
0,99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Приложение 6

Квантиль $\chi^2_{\alpha,\nu}$ распределения Пирсона (χ^2-распределения) [22]

Параметр распределения ν	Уровень значимости α										
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,500	0,010	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,0039	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82

Параметр распределения ν	Уровень значимости α										
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,500	0,010	0,050	0,025	0,010	0,005
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,196	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,856	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,520	11,524	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,160	12,198	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,808	12,878	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,461	13,565	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,121	14,256	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,787	14,953	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,707	22,164	24,43	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,991	29,707	32,36	34,76	37,69	49,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,534	37,485	40,48	43,19	46,46	59,33	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,275	45,442	48,76	51,74	55,33	69,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,172	53,540	57,15	60,39	64,28	79,33	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,196	61,754	65,65	69,13	73,29	89,33	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,328	70,065	74,22	77,93	82,36	99,33	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Примечание. Для ν > 100 $\chi^2_{\alpha,\nu} \approx 0,5\left(u_{1-\alpha} + \sqrt{2\nu-1}\right)^2$.

Приложение 7

Квантили $t_{\alpha,\nu}$ распределения Стьюдента (t-распределения) [22]

Параметр распределения ν	Уровень значимости α				
	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,314	12,706	25,452	63,656	127,321
2	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
3	2,353	3,182	4,177	5,841	7,453

Параметр распределения ν	Уровень значимости α				
	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
4	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
5	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
6	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
7	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
8	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833
9	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
10	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581
11	1,796	2,201	2,593	3,106	3,497
12	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428
13	1,771	2,160	2,533	3,012	3,372
14	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326
15	1,753	2,131	2,490	2,947	3,286
16	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252
17	1,740	2,110	2,458	2,898	3,222
18	1,734	2,101	2,445	2,878	3,197
19	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
20	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153
21	1,721	2,080	2,414	2,831	3,135
22	1,717	2,074	2,405	2,819	3,119
23	1,714	2,069	2,398	2,807	3,104
24	1,711	2,064	2,391	2,797	3,091
25	1,708	2,060	2,385	2,787	3,078
26	1,706	2,056	2,379	2,779	3,067
27	1,703	2,052	2,373	2,771	3,057
28	1,701	2,048	2,368	2,763	3,047
29	1,699	2,045	2,364	2,756	3,038
30	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030
40	1,684	2,021	2,329	2,704	2,971
60	1,671	2,000	2,299	2,660	2,915
120	1,658	1,980	2,270	2,617	2,860
500	1,648	1,965	2,248	2,586	2,820

Примечание. Для $\nu > 500$ $t_{\alpha,\nu} \approx U_{1-\alpha}$.

Приложение 8

Таблица П8.1

Квантили F_{α,ν_1,ν_2} распределения Фишера (*F*-распределения) для уровня значимости $\alpha = 0,1$ [22]

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,74	1,71	1,68	1,64

Окончание табл. П8.1

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,41	1,37	1,32	1,26

Таблица П8.2

Квантили F_{α,ν_1,ν_2} распределения Фишера (F-распределения) для уровня значимости α =0,05 [22]

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95	250,10	251,14	252,20	253,25
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,50	4,46	4,43	4,40

Продолжение табл. П8.2

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,85	1,81	1,75	1,70

Окончание табл. П8.2

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,55	1,50	1,43	1,35

Таблица П8.3

Квантили F_{α,ν_1,ν_2} распределения Фишера (*F*-распределения) для уровня значимости α =0,025 и [22]

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	976,71	984,87	1001,41	1005,60	1009,80	1014,02
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,46	39,47	39,48	39,49
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,08	14,04	13,99	13,95
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,46	8,41	8,36	8,31
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,23	6,18	6,12	6,07
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,07	5,01	4,96	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,36	4,31	4,25	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	3,89	3,84	3,78	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,56	3,51	3,45	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,31	3,26	3,20	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,12	3,06	3,00	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	2,96	2,91	2,85	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,84	2,78	2,72	2,66

Окончание табл. П8.3

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,73	2,67	2,61	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,64	2,59	2,52	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,57	2,51	2,45	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,50	2,44	2,38	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,44	2,38	2,32	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,39	2,33	2,27	2,20
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,35	2,29	2,22	2,16
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,31	2,25	2,18	2,11
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,27	2,21	2,14	2,08
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,24	2,18	2,11	2,04
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,21	2,15	2,08	2,01
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,18	2,12	2,05	1,98
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,16	2,09	2,03	1,95
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,13	2,07	2,00	1,93
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,11	2,05	1,98	1,91
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,09	2,03	1,96	1,89
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,07	2,01	1,94	1,87
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	1,94	1,88	1,80	1,72
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,82	1,74	1,67	1,58
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,69	1,61	1,53	1,43

Таблица П8.4

Квантили F_{α,ν_1,ν_2} распределения Фишера (*F*-распределения) для уровня значимости α =0,01 [22]

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
1	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07	6022,47	6055,85	6106,32	6157,28	6260,65	6286,78	6313,03	6339,39
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	3,94	3,86	3,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,78	2,69	2,61	2,52
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,72	2,64	2,55	2,46
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,67	2,58	2,50	2,40
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,62	2,54	2,45	2,35

Окончание табл. П8.4

Параметр распределения ν_2	Параметр распределения ν_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	30	40	60	120
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,58	2,49	2,40	2,31
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,54	2,45	2,36	2,27
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,50	2,42	2,33	2,23
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,47	2,38	2,29	2,20
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,44	2,35	2,26	2,17
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,41	2,33	2,23	2,14
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,39	2,30	2,21	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,20	2,11	2,02	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,03	1,94	1,84	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	1,86	1,76	1,66	1,53

Приложение 9

Критические значения критериев $t_{\alpha, N}$ и $u_{\alpha, N}$ для проверки гипотез о принадлежности выборочных значений генеральной совокупности [22]

N	t_α			u_α		
	α=0,10	α =0,05	α=0,01	α=0,10	α =0,05	α=0,01
3	1,50	1,74	2,22	1,15	1,15	1,15
4	1,70	1,94	2,43	1,42	1,46	1,49
5	1,84	2,08	2,57	1,60	1,67	1,75
6	1,94	2,18	2,68	1,73	1,82	1,94
7	2,02	2,27	2,76	1,83	1,94	2,10
8	2,09	2,33	2,83	1,91	2,03	2,22
9	2,15	2,39	2,88	1,98	2,11	2,32
10	2,20	2,44	2,93	2,03	2,18	2,41
11	2,24	2,48	2,97	2,09	2,23	2,48
12	2,28	2,52	3,01	2,13	2,29	2,55
13	2,32	2,56	3,04	2,17	2,33	2,61
14	2,35	2,59	3,07	2,21	2,37	2,66
15	2,38	2,62	3,10	2,25	2,41	2,70
16	2,41	2,64	3,12	2,28	2,44	2,75
17	2,43	2,67	3,15	2,31	2,48	2,78
18	2,46	2,69	3,17	2,34	2,50	2,82
19	2,48	2,71	3,19	2,36	2,53	2,85
20	2,50	2,73	3,21	2,38	2,53	2,88
21	2,52	2,75	3,22	2,41	2,58	2,91
22	2,54	2,77	3,24	2,43	2,60	2,94
23	2,56	2,78	3,26	2,45	2,62	2,96
24	2,57	2,80	3,27	2,47	2,64	2,99
25	2,59	2,82	3,28	2,49	2,66	3,01
30	2,70	2,93	3,40			
40	2,79	3,02	2,48			
50	2,86	3,08	3,54			
100	3,08	3,29	3,72			
250	3,34	3,53	3,95			
500	3,53	3,70	4,11			

Приложение 10

Критические значения $G_{\alpha,k,N}$ критерия Кохрана для уровня значимости α = 0,05 [16]

k	*N*					
	2	3	4	5	6	7
2	0,999	0,995	0,979	0,959	0,937	0,917
3	0,993	0,942	0,883	0,833	0,793	0,761
4	0,967	0,864	0,781	0,721	0,676	0,641
5	0,928	0,788	0,696	0,633	0,587	0,553
6	0,883	0,722	0,626	0,563	0,519	0,487
7	0,838	0,664	0,568	0,508	0,466	0,435
8	0,794	0,615	0,521	0,463	0,423	0,393
9	0,754	0,573	0,481	0,425	0,387	0,359
10	0,707	0,536	0,447	0,393	0,357	0,331
12	0,653	0,475	0,392	0,343	0,31	0,286
15	0,548	0,407	0,332	0,288	0,259	0,239
20	0,480	0,330	0,265	0,229	0,205	0,188
30	0,363	0,241	0,191	0,163	0,145	0,133

k	*n*					
	8	9	10	11	17	37
2	0,899	0,882	0,867	0,854	0,795	0,707
3	0,733	0,711	0,691	0,673	0,606	0,515
4	0,613	0,590	0,57	0,554	0,488	0,406
5	0,526	0,504	0,485	0,47	0,409	0,335
6	0,461	0,440	0,423	0,408	0,353	0,286
7	0,410	0,391	0,375	0,362	0,31	0,249
8	0,370	0,352	0,337	0,325	0,278	0,221
9	0,338	0,321	0,307	0,295	0,251	0,199
10	0,311	0,294	0,281	0,27	0,23	0,181
12	0,268	0,253	0,242	0,232	0,196	0,153
15	0,223	0,21	0,2	0,192	0,161	0,125
20	0,175	0,165	0,157	0,15	0,125	0,096
30	0,123	0,116	0,11	0,105	0,087	0,066

Приложение 11

Коэффициенты $a_{n-i+1} \cdot 10^4$ для расчета статистики критерия Шапиро — Уилка при проверке нормальности [12]

N	i												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	7071												
4	6872	1677											
5	6646	2413											
6	6431	2806	0875										
7	6233	3031	1401										
8	6052	3164	1743	0561									
9	5888	3244	1976	0947									
10	5739	3291	2141	1224	0399								
11	5601	3315	2260	1429	0695								
12	5475	3325	2347	1586	0922	0303							
13	5359	3325	2412	1707	1099	0539							
14	5251	3318	2460	1802	1240	0727	0240						
15	5150	3306	2495	1878	1353	0880	0433						
16	5056	3290	2521	1939	1447	1005	0593	0196					
17	4968	3273	2540	1988	1524	1109	0725	0359					
18	4886	3253	2553	2027	1587	1197	0837	0496	0173				
19	4808	3232	2561	2059	1641	1271	0932	0612	0303				
20	4734	3211	2565	2085	1686	1334	1013	0711	0422	0140			
21	4634	3185	2578	2119	1736	1399	1092	0804	0530	0263			
22	4590	3156	2571	2131	1764	1430	1150	0878	0618	0368	0122		
23	4542	3126	2563	2139	1787	1480	1201	0941	0696	0459	0228		
24	4493	3098	2554	2124	1807	1512	1245	0997	0764	0539	0321	0107	
25	4450	3069	2543	2148	1822	1539	1283	1046	0823	0610	0403	0200	
26	4407	3043	2533	2151	1836	1563	1316	1089	0876	0672	0476	0284	0094
27	4366	3018	2522	2152	1848	1584	1346	1128	0923	0728	0540	0358	0178
28	4328	2992	2510	2151	1857	1601	1372	1162	0965	0778	0598	0424	0253
29	4291	2968	2499	2150	1864	1616	1395	1192	1002	0822	0650	0483	0320
30	4254	2944	2487	2148	1870	1630	1415	1219	1036	0862	0697	0537	0381
31	4220	2921	2475	2145	1874	1641	1433	1243	1066	0899	0739	0585	0435
32	4188	2898	2463	2141	1878	1651	1449	1265	1093	0931	0777	0629	0485
33	4156	2876	2451	2137	1880	1660	1463	1284	1118	0961	0812	0669	0530
34	4127	2854	2439	2132	1882	1667	1475	1301	1140	0988	0844	0706	0572
35	4096	2834	2427	2127	1883	1673	1487	1317	1160	1013	0873	0739	0610

N	*i*												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
36	4068	2813	2415	2121	1883	1678	1496	1331	1179	1036	0900	0770	0645
37	4040	2794	2403	2116	1883	1683	1505	1344	1196	1056	0924	0798	0677
38	4015	2774	2391	2110	1881	1686	1513	1356	1211	1075	0947	0824	0706
39	3989	2755	2380	2104	1880	1689	1520	1366	1225	1092	0967	0848	0733
40	3964	2737	2368	2098	1878	1691	1526	1376	1237	1108	0986	0870	0759
41	3940	2719	2357	2091	1876	1693	1531	1384	1249	1123	1004	0891	0782
42	3917	2701	2345	2085	1874	1694	1535	1392	1259	1136	1020	0909	0804
43	3894	2684	2334	2078	1871	1695	1539	1398	1269	1149	1035	0927	0824
44	3872	2667	2323	2072	1868	1695	1542	1405	1278	1160	1049	0943	0842
45	3850	2651	2313	2065	1865	1695	1545	1410	1286	1170	1062	0959	0860
46	3830	2635	2302	2058	1862	1695	1548	1415	1293	1180	1073	0972	0876
47	3808	2620	2291	2052	1859	1695	1550	1420	1300	1189	1085	0986	0892
48	3789	2604	2281	2045	1855	1693	1551	1423	1306	1197	1095	0998	0906
49	3770	2589	2271	2038	1851	1692	1553	1427	1312	1205	1105	1010	0919
50	3751	2574	2260	2032	1847	1691	1554	1430	1317	1212	1113	1020	0932

N	*i*											
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
28	0084											
29	0159											
30	0227	0076										
31	0289	0144										
32	0344	0206	0068									
33	0395	0262	0131									
34	0441	0314	0187	0062								
35	0484	0361	0239	0119								
36	0523	0404	0287	0172	0057							
37	0559	0444	0331	0220	0110							
38	0592	0481	0372	0264	0158	0053						
39	0622	0515	0409	0305	0203	0101						
40	0651	0546	0444	0343	0244	0146	0049					
41	0677	0575	0476	0379	0283	0188	0094					
42	0701	0602	0506	0411	0318	0227	0136	0045				
43	0724	0628	0534	0442	0352	0263	0175	0087				
44	0745	0651	0560	0471	0383	0296	0211	0126	0042			
45	0765	0673	0584	0497	0412	0328	0245	0163	0081			
46	0783	0694	0607	0522	0439	0357	0277	0197	0118	0039		
47	0801	0713	0628	0546	0465	0385	0307	0229	0153	0076		

N	*i*											
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
48	0817	0731	0648	0568	0489	0411	0335	0259	0185	0111	0037	
49	0832	0748	0667	0588	0511	0436	0361	0288	0215	0143	0071	
50	0846	0764	0685	0608	0532	0459	0386	0314	0244	0174	0104	0035

Приложение 12

Критические значения $W_{\alpha,N}$ критерия Шапиро — Уилка для проверки нормальности эмпирического закона распределения [12]

N	α					N	α				
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50		0,01	0,02	0,05	0,10	0,50
3	0,737	0,756	0,767	0,789	0,959	27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970
14	0,825	0,846	0,974	0,895	0,947	38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,970
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,971
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,972
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,973
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974
24	0,884	0,889	0,916	0,930	0,963	48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974

Оглавление

Учебное издание

Михайленко Аркадий Михайлович,
Устинова Екатерина Ильинична

ОБРАБОТКА ОДНОМЕРНЫХ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Редактор И. В. Коршунова
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 22.12.2020. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 23,2.
Уч.-изд. л. 16,7. Тираж 100 экз. Заказ 229.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2020

9 785799 631673